This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

3e SÉRIE

TOME III

1er Cahier

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

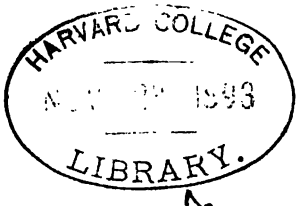
A BORDEAUX

CHEZ DUTHU, LIBRAIRE

17, rue Sainte-Catherine, 17

1886

~~Math 3658.86~~
Math 3608.86.5



Haven Fund

MONOGRAPHIE DE LA FONCTION GAMMA

PAR M. G. BRUNEL

INTRODUCTION

En 1817, Legendre avait consacré une section de ses *Exercices de calcul intégral* à l'étude des propriétés de la fonction gamma « lien naturel d'une multitude de transcendantes et source d'où se tirent aisément toutes les formules qui concernent la comparaison de ces transcendantes, leur réduction et leur évaluation ». Il considérait cette branche nouvelle de l'analyse comme amenée à peu près dès cette époque au point de perfection dont elle est susceptible.

Et, cependant, les travaux relatifs à la théorie et aux applications de cette fonction se sont, depuis Legendre, succédé d'une façon ininterrompue. Les Mémoires de Cauchy, Binet, Lejeune-Dirichlet, Liouville, Genocchi, Weierstrass, Schlömilch, Gilbert, Prym, Hermite, Bourguet ont soulevé et résolu des questions nouvelles. Les progrès généraux de l'analyse ne pouvaient manquer de se prêter à une étude plus approfondie de cette fonction.

Aussi, des mémoires nombreux ont-ils été publiés de côté et d'autre, parsemés dans les différents journaux mathématiques.

Nous avons cru qu'il ne serait point inutile de publier une monographie de la fonction gamma. Prenant comme base la

suite des principaux théorèmes qui se présentent dans cette théorie, nous nous sommes efforcé d'y rattacher les différents travaux auxquels ils ont donné naissance; nous avons essayé de donner en chaque occasion des renseignements bibliographiques aussi complets que possible.

Nous croyons qu'il sera bientôt indispensable de faire pour chaque branche de l'analyse un travail à peu près semblable à celui que nous offrons aujourd'hui.

Les *Tables d'intégrales définies* de Bieren de Haan, le *Bulletin* de Darboux, le *Jahrbuch* d'Ohrtmann nous ont fourni des matériaux nombreux qui se sont complétés peu à peu par les indications bibliographiques que nous fournissaient les Mémoires eux-mêmes.

Cette monographie est certainement incomplète; nous croyons pourtant qu'elle présente quelque intérêt. Nous avons eu à notre disposition, outre la bibliothèque universitaire, la bibliothèque de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux et celle si riche de M. Hoüel.

Bordeaux, mars 1886.

TABLE DES MATIÈRES

§ 1. Définition de la fonction gamma par une intégrale définie.

§ 2. Propriétés fondamentales de la fonction gamma.
Relation fonctionnelle.
Relation des compléments.
Formule d'Euler.
Relation de Gauss.

§ 3. Limitation de l'intervalle dans lequel il est nécessaire de calculer directement la fonction gamma pour la connaître pour toute valeur positive de l'argument.

§ 4. Sur le nombre minimum de transcendantes contenues dans la suite $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right), \Gamma\left(\frac{2}{n}\right), \ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$ et irréductibles l'une à l'autre.

§ 5. Définition au moyen des intégrales définies de la fonction gamma pour des arguments à partie réelle positive.
Extension des résultats précédents à toutes les valeurs de l'argument.
Sur les fonctions $P(a)$ et $Q(a)$.

§ 6. Définition de Gauss.
Démonstration de la relation de Gauss.

§ 7. Développement de $l\Gamma(a+1)$ pour $a < 1$.
Constante d'Euler.

§ 8. Sur la fonction $\psi(a) = \frac{d}{da} l\Gamma(a)$.
Propriétés de la fonction ψ.
Expression de $\psi(a) - \psi(1)$ sous forme d'intégrale définie.

§ 9. Calcul de $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$.

§ 10. Expressions de $\psi(a)$ et de $l\Gamma(a)$ sous forme d'intégrales définies.
Série de Kummer.

§ 11. Évaluation de la fonction gamma pour des valeurs considérables de l'argument.

Développement de $l\Gamma(a+1)$.

Nouvelle démonstration de la relation de Gauss.

Sur l'intégrale définie $\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da$.

§ 12. Séparation de $l\Gamma(a)$ en deux parties dont l'une a pour limite 0 lorsque a augmente indéfiniment.

§ 13. Formule de Stirling.

§ 14. Développement de $\frac{d^\mu \varpi(a)}{da^\mu}$.

Sur la constante d'Euler.

§ 15. Autres formules pour $l\Gamma(a)$ et $\varpi(a)$.

§ 16. Sur la fonction $\chi(a) = \frac{d^2\, l\Gamma(a)}{da^2}$.

Expression de $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$.

La fonction $\frac{1}{\Gamma(a)}$ est holomorphe.

§ 17. Construction de la table de logarithmes de la fonction $\Gamma(a)$ et des valeurs de la fonction $\psi(a)$.

Tables.

§ 18. Calcul des maxima et minima de la fonction $l\Gamma(a)$.

§ 19. Développements en série de $\frac{1}{\Gamma(a)}$, de $\Gamma(a)$ et de $P(a)$.

§ 20. Sur l'intégrale Eulérienne de première espèce.

§ 21. Autres intégrales qui se réduisent aux fonctions gamma.

§ 22. De l'emploi des imaginaires dans la réduction des intégrales définies aux fonctions gamma.

§ 23. Sur quelques intégrales multiples.

§ 24. Emploi de la fonction gamma dans la théorie des suites.

§ 25. Emploi de la fonction ψ dans la théorie des suites.

§ 26. Autres applications de la fonction gamma.

§ 27. Bibliographie.

Note sur le calcul fonctionnel.

ÉTUDE DE LA FONCTION GAMMA

§ 1. L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx, \tag{1}$$

dont la valeur dépend du seul nombre a, a été nommée par Legendre *intégrale Eulérienne de seconde espèce* ou *fonction gamma;* les géomètres ont adopté presque unanimement la dénomination de $\Gamma(a)$ par laquelle il l'a représentée. Nous désignerons sous le nom d'argument la quantité a qui apparaît dans l'intégrale définie considérée. Cette intégrale définie est susceptible de formes bien différentes.

Si l'on pose

$$x = l\frac{1}{y},$$

les limites deviennent 1 et 0 et l'on a

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(l\frac{1}{y}\right)^{a-1} dy. \tag{2}$$

Si, au contraire, on pose

$$x = e^z,$$

les limites deviennent $-\infty$ et $+\infty$, et l'on a

$$\Gamma(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{az} e^{-e^z} dz. \tag{3}$$

Il est évident que l'on pourrait donner à la fonction gamma bien des formes différentes. Nous nous bornons pour l'instant aux précédentes, en nous réservant de donner plus tard, quand la chose nous sera nécessaire, les formules différentes des précédentes qui présentent quelque intérêt.

C'est l'étude de l'interpolation de la série

$$1, 2, 6, 24, 120, \ldots$$

qui a donné naissance à la théorie de la fonction gamma, aux travaux de Stirling et d'Euler, dont nous aurons souvent l'occasion de parler. Cette série avait attiré l'attention de Goldbach et de Daniel Bernoulli. C'est probablement à l'instigation de Bernoulli qu'Euler s'en occupa. Il arriva immédiatement à la représentation d'un terme quelconque par l'intégrale définie (2), et l'on ne peut douter que c'est là le point de départ de ses nombreux travaux tant sur cette intégrale que sur les questions diverses qui s'y rattachent. Nous aurons à revenir plus tard sur les lettres d'Euler à Goldbach, contentons-nous pour le moment de dire qu'Euler avait déjà senti le besoin d'une notation particulière pour ce genre d'intégrales définies; il pose, par exemple,

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} dx,$$

dans son mémoire intitulé « *Evolutio formulæ integralis* $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$, *integratione a valore* $x = 0$ *ad* $x = 0$ *extensa* ». (*Nov. Comment. Acad. Sc. Petropolitanæ*, t. XVI, p. 91-139. *Calculus integralis*, t. IV, p, 78-121.)

Euler étudia aussi cette intégrale sous la forme (1) : *De valoribus integralium a termino variabili* $x = 0$ *usque ad* $x = \infty$ *extensorum. M. S. Academiæ exhib. d. 30 Aprilis 1781.* — *Calculus integralis*, t. IV, 337-345.

On a reproché à Legendre (Lacroix, *Calc. diff. et int.*) d'avoir introduit une dénomination nouvelle et un nom nouveau pour une fonction déjà étudiée à différents points de vue et que l'on

appelait déjà avant lui de deux noms différents (factorielle, faculté analytique). Et cependant, la dénomination de Legendre a prévalu, à cause même de sa simplicité et de sa commodité.

Gauss a proposé pour la même fonction un symbole différent. Dans ses *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$$1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

il représente par $\Pi(a-1)$ la fonction $\Gamma(a)$ de Legendre. La notation de Gauss a été peu employée.

C'est dans une note manuscrite placée en marge du mémoire que nous venons de citer que Gauss donne à la fonction gamma la forme (3), qu'il indique comme la meilleure définition de cette fonction (*Gauss Werke*, t. III, p. 230).

Nous prendrons en général la fonction $\Gamma(a)$ sous la forme

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx. \tag{1}$$

Supposant d'abord l'argument réel, nous nous demanderons en premier lieu à quelle condition l'intégrale définie présente une signification.

L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$$

doit être considérée comme la limite de l'intégrale

$$\int_\varepsilon^l e^{-x} x^{a-1}\, dx$$

lorsque l augmente et que ε a pour limite zéro. Les règles connues qui permettent de reconnaître si l'intégrale a une signification, montrent que l'existence de la limite supérieure n'apporte aucune restriction à la valeur de a. Il n'en est plus de même pour la limite inférieure; il faut que a soit positif pour que l'intégrale conserve un sens. Ce n'est que par une discussion approfondie des propriétés de la fonction gamma et par des

définitions autres que celle donnée par la formule (1) que nous arriverons successivement à définir pour des valeurs quelconques de l'argument une fonction qui coïncide avec la précédente lorsque a est positif.

§ **2.** On a, par définition,

$$\Gamma(a+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^a\,dx.$$

Or, en intégrant par parties

$$\int e^{-x}x^a\,dx=-e^{-x}x^a+a\int_1 e^{-x}x^{a-1}\,dx$$

et en remarquant que si l'on suppose a positif, $e^{-x}x^a$ est nul aux deux limites 0 et a,

$$\Gamma(a+1)=a\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx=a\Gamma(a).$$

La relation

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a) \tag{1}$$

constitue la première propriété de la fonction gamma; nous l'appellerons *relation fonctionnelle.*

L'intégration directe donne

$$\Gamma(1)=1,$$

et par conséquent, à cause de la relation fonctionnelle, on a, en supposant a entier,

$$\Gamma(a+1)=1.2.3\ldots a. \tag{2}$$

La relation fonctionnelle, prise comme définition, donne une signification à la fonction $\Gamma(a)$ lorsque l'argument est négatif. On a, par exemple,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right);$$

d'une façon générale, une valeur négative quelconque de l'argument se rattache au moyen de cette formule à une valeur positive, pour laquelle l'intégrale définie présente une signification.

Aux valeurs entières et négatives de a correspond de la sorte la valeur zéro, l'équation de définition de la fonction gamma s'applique quelque petit que soit a et donne

$$\Gamma(0) = \infty,$$

$\Gamma(-1)$, $\Gamma(-2)$, ..., $\Gamma(-p)$ sont donc aussi infinis, quel que soit le nombre entier p.

Remarquons toutefois que ce mode d'extension qui donne un sens au symbole Γ pour des valeurs où l'intégrale définie n'a pas de sens peut paraître arbitraire. Ce n'est que plus tard que nous verrons qu'il est nécessaire de faire cette généralisation et qu'il n'y a qu'un seul moyen de la faire.

La fonction Γ n'est pas la seule fonction satisfaisant à la relation trouvée. Considérons en effet une fonction définie par l'équation

$$F(a) = \Gamma(a)\varphi(a),$$

elle satisfait à la relation fonctionnelle si l'on a :

$$\varphi(a+1) = \varphi(a),$$

c'est-à-dire si $\varphi(a)$ admet une période égale à l'unité, et l'on sait qu'il y a une infinité de fonctions φ jouissant de cette propriété. On a

$$\varphi(a) = A_0 + A_1 \cos 2\pi a + A_2 \cos 4\pi a + \ldots + B_1 \sin 2\pi a + B_2 \sin 4\pi a + \ldots,$$

les coefficients A et B étant soumis à la seule restriction de rendre le développement convergent.

On a été conduit naturellement à se demander quelle était la signification de l'expression

$$1.2.3. \ldots a$$

lorsque a n'était pas un nombre entier. C'était sous une autre forme la question de l'interpolation de la série

$$1, 2, 6, 24, 120, \ldots,$$

mais cette forme nouvelle se prêtait à une généralisation immédiate, à l'examen de l'expression

$$a(a + d)(a + 2d) \ldots [a + (n - 1)d],$$

pour des valeurs quelconques de a, de d et de n.

De là l'emploi de symboles nombreux :

Vandermonde, *Mémoire sur les irrationnelles de différents ordres avec une application au cercle* (*Hist. de l'Ac. des Sc.*, 1772, p. 489...), pose

$$[p]^n = p(p - 1)(p - 2) \ldots (p - n + 1).$$

Kramp, *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, ch. III, écrit

$$a^{n/d} = a(a + d)(a + 2d) \ldots [a + (n - 1)d].$$

Crelle, *Mémoire sur la théorie des puissances...* (*J. de Cr.*, t. VII), emploie la notation

$$(a, + d)^n = a(a + d)(a + 2d) \ldots [a + (n - 1)d].$$

Outre ces travaux, nous devons citer aussi ceux de :

Bessel, *Ueber die Theorie der Zahlenfacultäten* (*Königsb. Arch. f. Naturw. und Math.*, I, p. 241 ; *Werke*, t. II, p. 342).

Eytelwein, *Grundlehren der höheren Analysis*, t. I, p. 551... t. II, p. 672...

Müller, *Beitrag zur Theorie der Facultäten* (*J. de Cr.*, t. XI, p. 361).

Oettinger, dans de nombreux mémoires insérés au *Journal de Crelle*, t. XXXIII, XXXV, XXXVIII et XLIV.

Ohm, *Ueber die Behandlung der Lehre der reellen Factoriellen und Facultäten, nach einer Methode der Einschliessung in Grenzen* (*J. de Cr.*, t. XXXIX, p. 23-41).

Raabe, *J. de Cr.*, t. XLIII, p. 283-292 et t. XLVIII, p. 130-136.

Mais on rencontrait dans cette théorie des difficultés de toutes sortes qui ne trouvèrent leur explication que lorsque Weierstrass eut montré dans un mémoire important (*J. de Cr.*, t. LI), la nature des conditions auxquelles satisfont les facultés analytiques et qui permettent de les définir complètement.

Nous aurons à revenir dans la suite sur ce qui doit être ajouté à la relation fonctionnelle pour déterminer la fonction gamma.

L'expression

$$1.2.3. \ldots n,$$

où n est supposé entier, peut être représentée par $\Gamma(n+1)$; il y a cependant avantage dans ce cas à employer une notation particulière $n!$, qui se lit n faculté; Euler avait employé le signe Δ; en Angleterre, on se sert du symbole $\underline{|n}$.

On a, entre deux fonctions Γ dont les arguments ont une somme égale à l'unité, la relation

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

On trouve, en effet, directement

$$\int_0^\infty e^{-(1+y)x}\,dx = \frac{1}{1+y}; \tag{3}$$

en multipliant les deux membres par $y^{a-1}dy$ et en intégrant entre les limites zéro et infini, on en déduit

$$\int_0^\infty y^{a-1}\,dy \int_0^\infty e^{-(1+y)x}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y}. \tag{4}$$

Appliquons au premier membre la règle d'intégration sous le signe $\int$ et remarquons qu'en posant $xy = z$ on a

$$\int_0^\infty e^{-xy}y^{a-1}\,dy = \int_0^\infty e^{-z}z^{a-1}\frac{dz}{x^a} = \frac{\Gamma(a)}{x^a}; \tag{5}$$

il devient

$$\Gamma(a)\int_0^\infty e^{-x}x^{-a}\,dx = \Gamma(a)\Gamma(1-a),$$

et l'on a donc

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y}. \tag{6}$$

Reste à évaluer l'intégrale du second membre. Posons

$$y = x^{2n}, \qquad a = \frac{2m+1}{2n}, \qquad m < n,$$

il vient

$$2n\int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y} = \int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}.$$

En décomposant la fonction $\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ en fractions de la forme $\frac{2A(x-a)+2Bb}{(x-a)^2+b^2}$, on sait que la valeur de l'intégrale est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = 2\pi(B + B' + \ldots).$$

Or, le calcul donne

$$2B = \frac{1}{n}\sin\frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Si donc on fait, pour abréger, $\frac{(2m+1)\pi}{2n} = \alpha$, on aura

$$2(B + B' + \ldots) = \frac{1}{n}[\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha].$$

La somme des sinus est la partie imaginaire de la somme de la progression

$$e^{\alpha i} + e^{3\alpha i} + \ldots + e^{(2n-1)\alpha i} = e^{\alpha i}\frac{e^{2n\alpha i}-1}{e^{2\alpha i}-1};$$

mais $2n\alpha = (2m+1)\pi$, donc $e^{2n\alpha i} = -1$ et la somme des exponentielles est égale à

$$\frac{-2e^{\alpha i}}{e^{2\alpha i}-1} = \frac{i}{\sin\alpha}.$$

Par suite,

$$2(B + B' + \ldots) = \frac{1}{n \sin \alpha};$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n}\pi},$$

et en substituant

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y}\,dy = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \tag{7}$$

On peut toujours, en faisant varier m et n, faire converger $\frac{2m+1}{2n}$ vers un nombre quelconque compris entre 0 et $+1$. On aura donc la formule

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}; \tag{8}$$

a étant un nombre quelconque compris entre zéro et un.

Cette relation constitue la seconde propriété de la fonction gamma, nous l'appellerons *relation des compléments*.

On est revenu à maintes reprises sur la démonstration de cette relation et sur l'expression de l'intégrale (7).

Euler, *Calc. int.*, t. I, p. 252.
— — t. IV, p. 106, p. 269.
Legendre, *Exercices...*, t. I, p. 224; t. II, p. 8.
Poisson, *J. Ec. Pol.*, t. XIX, p. 404.
Cauchy, *Mém. sav. étr.*, 1827, p. 599.
— *Mém. sur les int. déf. lim. imag.* Add. 12.
— *J. Ec. Pol.*, t. XXVIII, p. 147.
Bonnet, *J. de Liou.*, t. VI, p. 238.
Lejeune-Dirichlet, *J. de Cr.*, t. XV, p. 258.
Fürgensen, *J. de Cr.*, t. XXIII, p. 142.
Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXV p. 13.
— — t. XXXVIII, p. 162.
Winckler, *J. de Cr.*, t. XLV, p. 102.

Grunert, *Gr. Arch* , t. II, p. 266.
Schlömilch, *Gr. Arch.*, t. III, p. 278.
Serret, *J. de Liou.*, t. VIII, p. 1.
Greatheed, *Cambr. J.*, t. I, p. 17.
Dedekind, *J. de Cr.*, t. XLV, p. 70.
Enneper, *Schlöm. Z.*, t. XVIII, p. 411.

D'autres démonstrations s'appuient non plus sur la détermination d'une intégrale définie, mais sur la décomposition du sinus en un produit infini de facteurs. C'est ainsi que nous rencontrerons plus tard une démonstration de Gauss reposant sur l'expression de $\Gamma(a)$ par la limite d'un produit infini, ou encore une démonstration basée sur l'expression de la même fonction en un produit de facteurs primaires donnée par Weierstrass.

Si dans la formule

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

on fait $a = \frac{1}{2}$, on a

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi,$$

et par conséquent

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{9}$$

La démonstration directe est facile; on a, par définition,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Posons $x = y^2$, l'intégrale deviendra

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy. \tag{10}$$

Cette intégrale se trouve facilement; considérons la surface de

révolution engendrée par la courbe $z = e^{-x^2}$ tournant autour de $0z$, on a pour le volume compris à l'intérieur du cylindre d'axe $0z$ et de rayon l

$$V = \int_0^l 2\pi e^{-x^2} x\,dx = \pi(1 - e^{-l^2});$$

quand l augmente indéfiniment, on a $V = \pi$, et, pour la seule portion comprise à l'intérieur du premier angle des coordonnées, V est en général égal à $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-l^2})$ et a pour limite $\frac{\pi}{4}$. On peut évaluer autrement le volume en prenant pour base un carré de côtés $0x$ et $0y$; on a alors

$$V = \int_0^l dy \int_0^l e^{-x^2+y^2}\,dx = \int_0^l dy\, e^{-y^2} \int_0^l dx\, e^{-x^2} = H_l^2;$$

or ce volume est compris entre ceux correspondant aux cylindres de rayons l et $l\sqrt{2}$; on a donc

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-l^2}) < H_l^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2l^2}).$$

Lorsque l augmente indéfiniment, H_l a pour limite $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, les deux termes extrêmes ont même limite $\frac{\pi}{4}$; on retrouve donc bien la formule

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Les lettres d'Euler et de Daniel Bernoulli à Goldbach montrent qu'Euler était déjà arrivé à cette formule en 1729. Il la publia dans les *Anc. Mém. de Pétersb.*, t. V, p. 44; puis dans plusieurs autres mémoires : *Novi Comm. Petrop.*, t. XVI, § 28; *Calc. int.*, t. IV, p. 95...

La même formule s'est présentée dans bien des recherches :

Laplace, *Mém. de l'Ac.*, 1778, p. 227.

— — 1782, I, § 4.

— *Mém. Inst.*, 1809, p. 359.

— *Probabilités*, livre I, 24.

Legendre, *Exercices*, t. I, p. 281, p. 301.
Fourier, *Chaleur*, p. 360.
Kramp, *Réfract.*
Bidone, *Mém. Turin*, 1812, p. 231.
Binet, *J. Ec. Pol.*, t. XXVII, p. 123.
Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXV, p. 13.
Roberts, *J. de Liou.*, t. XVI, p. 1.
Grunert, *Gr. Arch.*, t. II, p. 266.

La formule (9) n'est qu'un cas particulier de la formule

$$\int_0^\infty e^{-p^2x^2}dx = \frac{1}{2p}\sqrt{\pi},$$

donnée par Bidone, *Mém. Turin*, 1812, p. 231.
Cisa de Grésy, *Mém. Turin*, 1821, p. 209.
Boncompagni, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 74.
Winckler, *J. de Cr.*, t. XLV, p. 102.
Schlömilch, *Gr. Arch.*, t. V, p. 90.
— *Studien*, t. 1, p. 12.

La formule (10) est comprise dans la formule plus générale

$$\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = p\int_0^\infty e^{-x^p}dx$$

de Legendre, *Exercices*, t. I, p. 301, et Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXV, p. 13, ou aussi dans la formule

$$\frac{1}{2b}\Gamma\left(\frac{1}{2b}\right) = \int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{p}{x}\right)^{2b}},$$

donnée par Boole, *J. de Liou.*, t. XIII, p. 113.

On peut donner à la relation aux compléments une autre forme. Telle qu'elle a été écrite, elle permet d'exprimer les fonctions gamma dont l'argument est compris entre zéro et $\frac{1}{2}$ en fonction de celles où l'argument varie de $\frac{1}{2}$ à 1. La relation fonctionnelle permet de la rendre applicable aux arguments compris entre deux

nombres entiers consécutifs quelconques. On a, par exemple,

$$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)=\frac{a(1-a)\pi}{\sin a\pi}.$$

On obtient une forme plus élégante en comptant les arguments à partir du milieu de la période; on a alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)=\frac{\pi}{\cos a\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}-a\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+a\right)=\left(\frac{1}{4}-a^2\right)\frac{\pi}{\cos a\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}-a\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+a\right)=\left(\frac{1}{4}-a^2\right)\left(\frac{9}{4}-a^2\right)\frac{\pi}{\cos a\pi}\ldots;$$

on a de même

$$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi a}{\sin a\pi},$$

$$\Gamma(2+a)\Gamma(2-a)=\frac{\pi a(1-a^2)}{\sin a\pi},$$

$$\Gamma(3+a)\Gamma(3-a)=\frac{\pi a(1-a^2)(4-a^2)}{\sin a\pi}\ldots.$$

Mais ce ne sont que des transformations de la relation aux compléments obtenues en tenant compte de la relation fonctionnelle. Ce ne sont pas de nouvelles formules.

La relation aux compléments permet de calculer la valeur de l'expression

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

quel que soit l'entier n. Si l'on renverse en effet l'ordre des facteurs et qu'on multiplie le résultat ainsi obtenu par l'expression proposée, on obtiendra son carré sous la forme

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Pour calculer cette expression, écrivons l'identité

$$\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}=\left(1-2x\cos\frac{2\pi}{2n}+x^2\right)\left(1-2x\cos\frac{4\pi}{2n}+x^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-2x\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n}\right);$$

en y faisant successivement $x=1$ et $x=-1$ et remplaçant le premier membre par sa vraie valeur n, on trouve

$$n=\left(2\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(2\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(2\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$
$$n=\left(2\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(2\cos\frac{2\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(2\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$

et, en multipliant ces deux équations membre à membre, et extrayant la racine carrée,

$$n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

On trouve donc par substitution

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette propriété a été donnée par Euler à différentes reprises. Voir par exemple *Bulletin de Darboux*, t. IV, 1e p., p. 209-256. Voir aussi Legendre, *Exercices*, t. II, p. 22.

Considérons l'intégrale

$$u=2\int_0^\infty e^{-\left(\alpha^2+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)}d\alpha, \tag{11}$$

ou plutôt, en posant $\alpha=\sqrt{x_1}$, l'intégrale

$$u=\int_0^\infty e^{-\left(x_1+\frac{k^2}{x_1}\right)}x_1^{\frac{1}{2}-1}dx_1; \tag{12}$$

on peut l'évaluer de la façon suivante. On a

$$\frac{du}{dk} = -2k\int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\frac{k^2}{\alpha_1}\right)}\,\alpha_1^{\frac{1}{2}-1}\frac{d\alpha_1}{\alpha_1},$$

ou bien, en posant

$$\alpha_1 = \frac{k^2}{\alpha_2},$$

$$\frac{du}{dk} = -2\int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\frac{k^2}{\alpha_1}\right)}\,\alpha_2^{\frac{1}{2}-1}\,d\alpha_2 = -2u.$$

On a donc

$$\frac{du}{u} = -2dk, \qquad u = ce^{-2k};$$

la constante c se détermine en faisant $k = 0$ dans (1) ou (2), on trouve ainsi

$$c = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

et on a la formule

$$\int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\frac{k^2}{\alpha_1}\right)}\,\alpha_1^{\frac{1}{2}-1}\,d\alpha_1 = \sqrt{\pi}\,e^{-2k}. \tag{13}$$

Multiplions les deux membres de l'équation (13) par $k^{\mu-1}\,dk$ et intégrons de $k = 0$ à $k = \infty$, on a

$$\int_0^\infty k^{\mu-1}\,dk\int_0^\infty e^{-\left(\alpha_2+\frac{k^2}{\alpha_2}\right)}\,\alpha_2^{\frac{1}{2}-1}\,d\alpha_2 = \sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-2k}\,k^{\mu-1}\,dk. \tag{14}$$

Le premier membre devient, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_2}\,\alpha_2^{\frac{1}{2}-1}\,d\alpha_2\int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{\alpha_2}}\,k^{\mu-1}\,dk,$$

et en posant $\frac{k^2}{\alpha_2} = \beta$, la seconde intégrale devient

$$\frac{1}{2}\,\alpha_2^{\frac{\mu}{2}}\int_0^\infty e^{-\beta}\,\beta^{\frac{\mu}{2}-1}\,d\beta = \frac{1}{2}\,\alpha_2^{\frac{\mu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right),$$

et par substitution, on trouve pour l'expression considérée

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right).$$

D'autre part, on a

$$\int_0^\infty e^{-2k}k^{\mu-1}\,dk = \frac{\Gamma(\mu)}{2^\mu};$$

on arrive donc à la relation

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = 2^{1-\mu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu), \tag{15}$$

que l'on peut aussi écrire

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}-\mu}(2\pi)^{\frac{2-1}{2}}\Gamma(\mu). \tag{16}$$

Cette relation entre les fonctions gamma n'est qu'un cas particulier d'une formule générale que l'on peut obtenir précisément par une généralisation du procédé que nous venons d'employer. Considérons l'intégrale multiple

$$u = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\cdots \cdots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\cdots d\alpha_{n-1}; \tag{17}$$

on peut l'évaluer de la façon suivante. On a

$$\frac{du}{dk} = -nk^{n-1}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\cdots \cdots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\frac{d\alpha_1\,d\alpha_2\cdots d\alpha_{n-1}}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}},$$

ou bien, en posant

$$\alpha_1 = \frac{k^n}{\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n},$$

$$\frac{du}{dk} = -n\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\frac{k^n}{\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}\right)} \alpha_2^{\frac{1}{n}-1}\alpha_3^{\frac{2}{n}-1}\cdots \cdots \alpha_n^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_2\,d\alpha_3\cdots d\alpha_n,$$

$$\frac{du}{dk} = -nu.$$

On a donc

$$\frac{du}{u} = -n\,dk, \qquad u = ce^{-nk};$$

la constante c se détermine en faisant $k = 0$ dans (17), on trouve ainsi

$$c = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}},$$

et on a la formule

$$(18)\quad \int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\right)}\,\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_{n-1} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}}\,e^{-nk}.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (18) par $k^{\mu-1}\,dk$, et intégrons de $k = 0$ à $k = \infty$; le premier membre devient, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})}\,\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_{n-1}\int_0^\infty e^{-\frac{k^n}{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}\,k^{\mu-1}\,dk,$$

et, en posant, $\dfrac{k^n}{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}} = \beta$, la dernière intégrale est égale à

$$\frac{1}{n}(\alpha_1\ldots\alpha_{n-1})^{\frac{\mu}{n}}\int_0^\infty e^{-\beta}\,\beta^{\frac{\mu}{n}}\,d\beta = \frac{1}{n}(\alpha_1\ldots\alpha_{n-1})^{\frac{\mu}{n}-1}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right),$$

et, par substitution, on trouve pour l'expression considérée

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right).$$

D'autre part, on a dans le second membre l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-nk}\,k^{\mu-1}\,dk = \frac{1}{n^\mu}\,\Gamma(\mu),$$

et on arrive enfin à la relation

$$(19)\quad \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-\mu}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(\mu).$$

La relation (15) correspondait au cas particulier de $n = 2$. On peut écrire la relation générale sous une autre forme; posons $\frac{\mu}{n} = a$, et elle devient

$$(20)\quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n^{-na}\Gamma(na),$$

forme sous laquelle elle est le plus souvent employée.

L'intégrale (11) se rencontre souvent; nous citerons :

Laplace, *Nouv. Bull. Soc. Philom.*, N. 43.

— *Probabilités*, livre I, 26.

Poisson, *Nouv. Bull. Soc. Philom.*, N. 50.

— *J. Ec. Pol.*, t. XVI, p. 215.

Bidone, *Mém. Turin.*, 1812, p. 231.

Cisa de Grésy, *Mém. Turin.*, 1821, p, 209.

Cauchy, *Mém. Sav. Etr.*, 1827, p. 124.

Von Schmidten, *J. de Cr.*, t. V, p. 388.

Kummer, *J. de Cr.*, t. XVII, p. 228.

Boole, *J. de Liou.*, t. XIII, p. 111.

Bonnet, *J. de Liou.*, t. XIV, p. 249.

Helmling, *Transf. best. Integr.*, p. 27.

L'emploi de cette intégrale pour la démonstration des formules (15) et (19) est dû à Liouville : *Détermination d'une classe remarquable d'intégrales définies multiples et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de Gauss concernant les fonctions gamma de Legendre.* (*J. de Liou.*, t. I,, p. 82-88, et C. R., t. XLII, p. 501.) La formule (15) avait été établie tout d'abord par Legendre (*Exerc.*, t. I, p. 284); Poisson, *J. Ec. Pol.*, t. IX, p. 146, arrive à une équation entre deux intégrales Eulériennes qui lui paraissait contenir une nouvelle relation utile dans la réduction de ces transcendantes; Legendre a montré (*Exerc.*, t. II, p. 119) que cette équation revenait à la formule (15).

Liouville a retrouvé une démonstration indirecte de la même formule : *Démonstration nouvelle d'une formule de M. William Thomson.* (*J. de Liou.*, t. I,, p. 445-450.)

La formule générale (20) a été établie par Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} x + \ldots$ (*Comment. Soc. R. Sc. Götting.*, t. II, 1813. — *Werke*, t. III, p. 149). Voir § 6.

Legendre démontra cette formule au moyen du développement en séries des dérivées successives de $l\Gamma(1+x)$ (*Exerc.*, t. II, p. 16...).

Nous aurons à revenir sur la démonstration de la *relation de Gauss* due à Cauchy et basée sur l'évaluation approchée de la fonction gamma et aussi sur celle reposant sur l'expression de cette fonction sous forme de produit infini.

N. Sonine, dans une *Note sur une formule de Gauss* (*Bull. S. M. F.*, t. IX, p. 162-166) a établi la relation de Gauss en partant de la relation $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, en ayant recours seulement à des considérations fonctionnelles et sans employer le calcul intégral.

Une démonstration reposant sur une expression particulière de $l\Gamma(a)$ a été donnée par Gilbert : *Recherches sur le développement de la fonction gamma.* (*Mém. Acad. Sc. de Belgique*, t. XLI, p. 55, § 29.)

Dans le *Journal de Crelle*, t. XV, p. 258, Lejeune Dirichlet donna une démonstration fondée non plus sur la considération des produits infinis ou des séries, mais sur celle des intégrales définies.

Nous aurons l'occasion de revenir plus tard à différentes occasions sur la démonstration de cette formule; nous devons cependant encore ici citer la démonstration de Stern (*J. de Cr.*, t. XXI, p. 377) basée sur la représentation par une intégrale définie de la différence

$$\frac{dl\Gamma(a)}{da} - \frac{dl\Gamma(b)}{db}.$$

Dans ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 390, Cauchy est revenu sur la question qui nous occupe et s'est inquiété d'une façon plus générale de la recherche des équations linéaires qui vérifient les valeurs diverses $l\Gamma(a)$.

§ 3. La formule

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \tag{1}$$

montre que pour calculer la fonction gamma pour toutes les valeurs de l'argument, il suffit de la connaître pour toutes les valeurs de cet argument comprises dans un intervalle égal à l'unité, par exemple entre 0 et 1 ou bien entre 1 et 2 ....

La relation des compléments

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \tag{2}$$

permettra d'ailleurs de restreindre encore cet intervalle; si la période prise comme période fondamentale correspond aux valeurs de l'argument comprises entre zéro et un, l'application directe de la formule (2) donnera $\Gamma(a)$ pour toutes les valeurs comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1 quand on connaîtra la même fonction pour celles comprises entre zéro et $\frac{1}{2}$. La relation de Gauss donne lieu à une réduction encore plus considérable de l'intervalle dans lequel il est nécessaire de calculer $\Gamma(a)$.

Prenons d'abord le cas de $n = 2$:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2a}}\Gamma(2a); \tag{3}$$

nous allons voir qu'il suffit de connaître $\Gamma(a)$ depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \frac{1}{4}$ pour pouvoir déterminer cette fonction dans tout le reste de la première période, depuis $x = \frac{1}{4}$ jusqu'à 1.

Désignons pour abréger les notations $l\Gamma(a)$ par (a), les équations (2) et (3) peuvent s'écrire

$$(a) + (1-a) = l\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$(a) + \left(\frac{1}{2}+a\right) - (2a) = \frac{1}{2}l2\pi + \frac{1}{2}l2 - 2al2;$$

les seconds membres étant connus lorsque a est donné, nous les

désignerons par la lettre d qui désignera également toute quantité composée de termes connus. On peut alors écrire les équations précédentes sous la forme

$$(4) \qquad (a) + (1 - a) = d;$$

$$(5) \qquad (a) + \left(\frac{1}{2} + a\right) - (2a) = d.$$

Si dans l'équation (5) on fait $a = \frac{1}{4} + x$, on aura

$$(6) \qquad \left(\frac{1}{4} + x\right) + \left(\frac{3}{4} + x\right) - \left(\frac{1}{2} + 2x\right) = d;$$

mais les équations (4) et (5) donnent

$$\left(\frac{3}{4} + x\right) = -\left(\frac{1}{4} - x\right) + d,$$

$$\left(\frac{1}{2} + 2x\right) = (4x) - (2x) + d;$$

on obtient donc, en substituant dans l'équation (6),

$$\left(\frac{1}{4} + x\right) = \left(\frac{1}{4} - x\right) + (4x) - (2x) + d.$$

Tant que x est plus petit que $\frac{1}{12}$, cette équation détermine (a) ou $\left(\frac{1}{4} + x\right)$ par d'autres fonctions où a est plus petit que $\frac{1}{4}$. En donnant à x toutes les valeurs depuis $x = 0$ jusqu'à $= \frac{1}{12}$, on connaîtra (a) depuis $a = \frac{1}{4}$ jusqu'à $a = \frac{1}{3}$.

Pour le cas particulier où $a = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{12}$, les équations (4) et (5) donnent immédiatement

$$\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) = d,$$

$$\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} = d.$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right) + d.$$

Reste à déterminer (a) depuis $a = \frac{1}{3}$ jusqu'à $a = \frac{1}{2}$, or les équations (4) et (5) donnent

$$\left(\frac{1}{2} - x\right) = (x) - (2x) + d,$$

et si l'on donne à x toutes les valeurs depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{6}$, le second membre est connu, et l'on trouve la valeur de la fonction (a) depuis $a = \frac{1}{3}$ jusqu'à $a = \frac{1}{2}$.

Les solutions effectives sont données par la suite des trois équations

$$\left(\frac{1}{4} + x\right) = \left(\frac{1}{4} - x\right) - (2x) + (4x) + \left(\frac{1}{2} + 2x\right) l2 + l\sin\left(\frac{1}{4} - x\right)\pi,$$

$$2\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} l\pi - \frac{2}{3} l2 - l\sin\frac{\pi}{3},$$

$$\left(\frac{1}{2} - x\right) = (x) - (2x) + \frac{1}{2} l\pi - (1 - 2x) l2 - l\cos\pi x.$$

On est dès lors conduit à penser que l'emploi de la relation de Gauss où l'on fera successivement $n = 3, 5, 7, 11 \ldots$ peut conduire à une réduction plus grande de l'espace où il faut connaître la fonction gamma.

C'est en effet ce qui a lieu. La relation obtenue en faisant $n = 3$ permet de réduire cet intervalle à $\frac{1}{6}$; il suffit alors de connaître (a) de $a = 0$ jusqu'à $a = \frac{1}{18}$ et de $a = \frac{5}{18}$ jusqu'à $a = \frac{7}{18}$, ces deux parties réunies faisant un somme égale à $\frac{1}{6}$. Les relations de Gauss pour des valeurs premières de n et supérieures à 3 montreraient qu'il suffit de connaître la fonction $\Gamma(a)$ pour un ou plusieurs intervalles aussi petits que l'on

voudra afin de pouvoir en déduire sa valeur pour des valeurs réelles quelconques de a, nous ne nous arrêterons cependant pas sur la proportion de cette réduction et sur la distribution des parties qui exigent la connaissance de la fonction dans le plus petit intervalle.

Legendre, à qui l'on doit, comme nous l'avons déjà dit, la relation (3), l'employa à la réduction de l'intervalle où il faut connaître la fonction gamma (*Exerc.* t. I, partie II, § 61). Il est revenu, dans ses *Exercices* (t. II, partie IV, p. 26 ...), sur cette question et a donné alors le procédé de réduction que nous venons d'exposer en même temps que sa généralisation au moyen des relations de Gauss pour les valeurs de n supérieures à 2. Il établit les formules de réduction correspondant au cas de $n = 3$.

Hoppe, *J. de Cr.*. t. XL, p. 152, s'occupa également de la détermination de l'intervalle fondamental dans lequel il est nécessaire de calculer directement la fonction gamma ; mais les résultats auxquels il arrive ne présentent point encore la généralité que l'on pourrait souhaiter.

§ **4.** Nous avons trouvé précédemment une formule entre les fonctions gamma dont les arguments sont $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ n étant un nombre entier, et cette formule résultait de l'emploi de la relation des compléments : nous sommes conduits maintenant à nous demander quel est le nombre minimum de transcendantes contenues dans la suite $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right), \Gamma\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$ non réductibles l'une à l'autre. Si n est un nombre premier, nous ne pouvons faire usage que de la relation $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ et les transcendantes ne peuvent être réduites à un nombre moindre que $\frac{1}{2}(n-1)$. Mais si n est un nombre composé, chaque facteur donnera lieu à l'application de la relation de Gauss relative à ce facteur.

Si n est divisible par 2, on appliquera la formule

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\Gamma(2a)\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{2}-2a},$$

où l'on fera successivement $a=\frac{1}{n}$, $a=\frac{2}{n}$, ... jusqu'à $a=\frac{1}{4}$; il est inutile de donner à a des valeurs supérieures de la forme $\frac{p}{n}$ qui ne donneraient point, d'après ce qui a déjà été dit, de relations nouvelles. On obtient ainsi des formules de réduction.

Si n est divisible par 3, on appliquera la formule

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{3}\right)=\Gamma(3a)\,(2\pi)\,3^{\frac{1}{2}-3a},$$

où l'on fera successivement $a=\frac{1}{n}$, $a=\frac{2}{n}$, ..., jusqu'à $a=\frac{1}{6}$; on aura de la sorte de nouvelles formules de réduction.

Et ainsi de suite.

Soit, par exemple, $n=12$, nous désignerons pour abréger $l\Gamma\left(\frac{k}{12}\right)$ par (k), on aura à appliquer les formules

$$(1)\qquad (a)+(1-a)=l\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$(2)\qquad (a)+\left(\frac{1}{2}+a\right)-(2a)=d,$$

$$(3)\qquad (a)+\left(\frac{1}{3}+a\right)+\left(\frac{2}{3}+a\right)-(3a)=d.$$

L'équation (1) permet immédiatement d'exprimer (7), (8), (9), (10) et (11) au moyen de (1), (2), (3), (4), (5); on a donc seulement à s'occuper de ces deux dernières quantités puisque (6) est connu et est égal à $\sqrt{\pi}$.

L'équation (2), en y faisant successivement $a=\frac{1}{12}$ et $a=\frac{2}{12}$ donne

$$(1)+(7)-(2)=\frac{1}{2}l\pi+\frac{5}{6}l2,$$

$$(2)+(8)-(4)=\frac{1}{2}l\pi+\frac{4}{6}l2;$$

mais on a, en posant $\frac{\pi}{12} = \omega$,

$$(5) + (7) + l\frac{\pi}{\sin 5\omega} = l\pi + 2l2 + l\sin\omega,$$

$$(4) + (8) = l\frac{\pi}{\sin 4\omega} = l\pi + l2 - \frac{1}{2}l3;$$

et il vient

$$(5) = (1) - (2) + \frac{1}{2}l\pi + \frac{7}{6}l2 + l\sin\omega,$$

$$(4) = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{4}l\pi + \frac{1}{6}l2 - \frac{1}{4}l3.$$

L'application de la troisième relation conduira à une nouvelle réduction : en y faisant $a = \frac{1}{12}$, on obtient l'équation

$$(1) + (5) + (9) - (3) = l2\pi + \frac{1}{4}l3;$$

mais on a

$$(3) + (9) = l\frac{\pi}{\sin 3\omega} = l\pi + \frac{1}{2}l2;$$

remplaçant alors (9) en fonction de (3) et (5) par la fonction de (1) et (2) trouvée précédemment, il vient

$$(3) = (1) - \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{4}l\pi + \frac{1}{3}l2 - \frac{1}{8}l3 + \frac{1}{2}l\sin\omega.$$

Donc (1) et (2) suffisent pour déterminer toutes les autres transcendantes.

On pourrait également exprimer les différentes transcendantes au moyen de (3) et de (4), c'est-à-dire de $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, ce qui peut paraître plus naturel.

Considérons maintenant le cas de $n = 24$. Nous désignerons par (k) la quantité $l\Gamma\left(\frac{k}{24}\right)$. Les résultats trouvés dans le cas de $n = 12$ donnent ici des réductions entre les fonctions (2), (4),

(6), (8), (10); on a, en désignant par d une quantité déterminée,

$$(6) = (2) - \frac{1}{2}(4) + d,$$
$$(8) = \frac{1}{2}(4) + d.$$
$$(10) = (2) - (4) + d.$$

L'existence du facteur 2 donne ensuite naissance aux relations

$$(1) + (13) - (2) = d,$$
$$(3) + (15) - (6) = d,$$
$$(5) + (17) - (10) = d,$$

qui deviennent, en tenant compte de la relation des compléments,

$$(11) = (1) - (2) + d,$$
$$(9) = (3) - (6) + d,$$
$$(7) = (5) - (10) + d.$$

L'existence du facteur 3 donne deux nouvelles relations qui deviennent, en tenant compte de la relation des compléments,

$$(1) + (9) - (7) - (3) = d,$$
$$(3) + (11) - (5) - (9) = d.$$

Ces deux formules se réduisent à une seule, en vertu des relations déjà trouvées,

$$(5) = (1) - (2) + (6) + d.$$

On voit donc qu'il est nécessaire de connaître seulement quatre transcendantes (1) et (3), (2) et (4) pour obtenir toutes les autres; l'expression de (6), (8), (10) a été donnée; on a pour (5), (7), (9) et (11) les formules

$$(5) = (1) - \frac{1}{2}(4) + d,$$
$$(7) = (1) - (2) + \frac{1}{2}(4) + d,$$
$$(9) = (3) - (2) + \frac{1}{2}(4) + d,$$
$$(11) = (1) - (2) + d.$$

Considérons encore le cas de $n = 60$ et posons $l\Gamma\left(\frac{k}{60}\right) = (k)$; les formules trouvées pour $n = 12$ donnent ici

$$(15) = (5) - \frac{1}{2}(10) + d,$$
$$(20) = \frac{1}{2}(10) + d,$$
$$(25) = (5) - (10) + d.$$

L'existence du facteur 2 donne pour k pair, en tenant compte de la relation des compléments,

$$(28) = (2) - (4) + d,$$
$$(26) = (4) - (8) + d,$$
$$(24) = (6) - (12) + d,$$
$$(22) = (8) - (16) + d,$$
$$(18) = (12) - (24) + d,$$
$$(16) = (14) - (28) + d.$$

Le facteur (3) donne ensuite

$$(2) + (22) - (18) - (6) = d,$$
$$(4) + (24) - (16) - (12) = d,$$
$$(6) + (26) - (14) - (18) = d,$$
$$(8) + (28) - (12) - (24) = d;$$

ces dix équations se réduisent à huit et permettent d'écrire

$$(28) = (2) - (4) + d,$$
$$(26) = (2) - (6) + d,$$
$$(24) = (6) - (12) + d,$$
$$(22) = 2(12) - (2) + d,$$
$$(18) = 2(12) - (6) + d,$$
$$(16) = (4) + (6) - 2(12) + d,$$
$$(14) = (2) + (6) - 2(12) + d,$$
$$(8) = (6) + (4) - (2) + d.$$

On voit que (2), (4), (6) et (12) suffisent pour déterminer (k) lorsque k est pair et non divisible par 5.

Le facteur 5 donne maintenant naissance aux relations

$$(2) + (14) + (26) - (22) - (10) - (10) = d,$$
$$(4) + (16) + (28) - (20) - (8) - (20) = d,$$

qui se réduisent à une seule :

$$(12) = (2) - \frac{1}{2}(10) + d.$$

En substituant cette valeur de (12) dans les équations trouvées précédemment, on voit en somme que toutes les fonctions (k), où k est pair, s'expriment en fonction de (2), (4), (6), (10).

Si k est impair, le facteur 2 donne les relations

$$(29) = (1) - (2) + d,$$
$$(27) = (3) - (6) + d,$$
$$(23) = (7) - (14) + d,$$
$$(21) = (9) - (18) + d,$$
$$(19) = (11) - (22) + d,$$
$$(17) = (13) - (26) + d.$$

Le facteur 3 fournit quatre relations qui se réduisent à deux seulement :

$$(11) = (1) + (9) - (2) - (3) + (6) + d,$$
$$(13) = (3) + (7) - (9) + 2(2) - 2(6) - (10) + d.$$

Le facteur 5 donne deux relations qui se réduisent à une seule :

$$(9) = (3) + (2) - (6) - \frac{1}{2}(10) + d.$$

On voit dès lors qu'en ajoutant aux termes (2), (4), (6), (10) les quatre autres (1), (3), (5), (7), on pourra achever de déterminer toutes les transcendantes (k). On trouve pour les valeurs impaires de k les expressions suivantes :

$$(9) = (3) + (2) - (6) - \frac{1}{2}(10) + d,$$
$$(11) = (1) - \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(13) = (7) + (2) - (6) - \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(15) = (5) - \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(17) = (7) - \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(19) = (1) - (2) + \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(21) = (3) - (2) + \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(23) = (7) + (2) - (6) - (10) + d,$$

$$(25) = (5) - (10) + d,$$

$$(27) = (3) - (6) + d,$$

$$(29) = (1) - (2) + d.$$

Désignons par N le nombre des transcendantes nécessaires pour déterminer toutes les autres, on aura

$$\text{pour } n = 12, \qquad N = 2 = \frac{12}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{pour } n = 24, \qquad N = 4 = \frac{24}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{pour } n = 60, \qquad N = 8 = \frac{60}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right);$$

on est donc porté à croire que si α, β, γ ... sont les nombres premiers inégaux qui divisent n, on aura

$$N = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\ldots,$$

c'est-à-dire que N est égal au nombre des nombres premiers à n et inférieur à $\frac{n}{2}$. Il y aura d'ailleurs dans chaque cas bien des manières de choisir les transcendantes au moyen desquelles s'expriment toutes les autres.

Legendre est revenu à plusieurs reprises, dans ses *Exercices*, sur la réduction au nombre le plus petit possible de transcen-

dantes $\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)$. Il s'est également occupé de la nature des transcendantes fondamentales au moyen desquelles on peut exprimer toutes les autres, et a montré que dans le cas de $n = 12$ on avait affaire à des transcendantes elliptiques. Catalan s'est occupé de la même question (*Mém. de Belgique*, t. XLII). Toutes les formules établies précédemment sont dues à Legendre; nous nous y sommes arrêtés à cause du théorème par induction auquel elles conduisent.

Plana (*J. de Cr.*, t. XVII, p. 198) a donné d'autres exemples encore que ceux de Legendre et a essayé une démonstration du théorème général qui est loin d'être rigoureuse.

Le seul essai sérieux de démonstration que nous pouvons citer est celui de Stern. (*J. de Cr.*, t. LXVII, p. 114.)

§ **5.** Nous n'avons étudié jusqu'ici la fonction gamma que pour des valeurs réelles et positives de l'argument; nous allons nous occuper maintenant du cas où l'argument est quelconque.

L'intégrale définie

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

n'a de signification que pour les valeurs positives de a. Supposons maintenant l'argument imaginaire et de la forme $\alpha + i\beta$, on a alors

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int_0^\infty e^{lx(\alpha-1+i\beta)}\, e^{-x}\, dx$$
$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \cos lx^\beta\, dx + i \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \sin lx^\beta\, dx,$$

où le logarithme portant sur la quantité positive x^β est pris dans le sens arithmétique. On reconnaît que les deux intégrales qui figurent dans le second membre n'ont de signification qu'en supposant $\alpha > 0$. Cette condition, qui est nécessaire, est d'ailleurs suffisante et nous voyons que la considération de l'intégrale

définie prise comme définition nous donne comme fonction gamma une fonction uniforme qui n'a d'existence que dans la moitié du plan située à droite de Oy.

On peut cependant conclure de cette définition de la fonction $\Gamma(a)$ dans une moitié seulement du plan l'existence d'une fonction analytique uniforme dans tout le plan et qui coïncide avec la première dans l'espace situé à droite de Oy.

Posons, en effet,

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = P(a) + Q(a),$$

en faisant

$$P(a) = \int_0^\omega x^{a-1} e^{-x} dx,$$

$$Q(a) = \int_\omega^\infty x^{a-1} e^{-x} dx,$$

ω étant une valeur quelconque positive. L'intégrale $Q(a)$ définit une fonction analytique de a dans toute l'étendue du plan, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de a : nous avons vu en effet précédemment que c'était la circonstance de la limite zéro de l'intégrale $\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ qui oblige de supposer a positif, ou plus généralement la partie réelle de a positive. La fonction $Q(a)$ est donc finie, continue et uniforme dans tout le plan, c'est-à-dire une fonction holomorphe. Quant à la fonction $P(a)$, elle n'est donnée par l'intégrale $\int_0^\omega x^{a-1} e^{-x} dx$ que dans la moitié du plan à droite de Oy ; mais, remplaçant e^{-x} par son développement en série convergente

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

on obtient immédiatement l'expression suivante :

$$P(a) = \frac{\omega^a}{a} - \frac{\omega^{a+1}}{a+1} + \frac{1}{1.2}\frac{\omega^{a+2}}{a+2} - \ldots.$$

Or la série obtenue ainsi en partant d'une intégrale définie est convergente, et même rapidement convergente pour toute valeur réelle ou imaginaire de a, les valeurs $0, -1, -2, -3, \ldots$ étant toutefois exceptées; elle définit par suite une fonction analytique uniforme. En distinguant par $P(a)$ ce développement en série, la formule

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a)$$

nous donne une définition générale de la fonction gamma valable pour une valeur quelconque de l'argument. $P(a)$ représente la partie fractionnaire ou méromorphe de $\Gamma(a)$ et met en évidence les pôles $a = 0, -1, -2, \ldots$

Si l'on fait en particulier $\omega = 1$, la partie méromorphe et la partie entière de $\Gamma(a)$ deviennent

$$P(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{a+2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n)} + \ldots,$$

$$Q(a) = \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx = c_0 + c_1 a + \ldots + c_n a^n + \ldots,$$

en posant

$$n!\, c_n = \int_1^\infty e^{-x} (lx)^n \frac{dx}{x}.$$

$P(a)$ met alors en évidence les valeurs des résidus en chaque pôle.

Nous venons de passer de la sorte d'une expression donnée par une intégrale définie dans une portion du plan, à une fonction analytique dans tout le plan. On doit naturellement se demander si une pareille extension n'est possible que d'une seule manière.

D'après un théorème de Riemann, si deux fonctions uniformes U et V qui ont un nombre quelconque fini ou infini de pôles ou points singuliers essentiels, coïncident le long d'un élément de grandeur définie, aussi petit que l'on veut, elles sont nécessairement identiques. Il n'y a donc pas d'autre fonction uniforme que la fonction $\Gamma(a)$ telle que nous venons de l'obtenir, qui puisse coïncider avec l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$, lorsque cette intégrale définit une fonction.

A la relation fonctionnelle entre les fonctions gamma correspondent des relations fonctionnelles entre les fonctions P et aussi entre les fonctions Q.

On a

$$P(a+1) = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{a+3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n+1)},$$

or, on peut écrire identiquement

$$\frac{(-1)^n}{n!\,(a+n+1)} \overset{\text{reades minus}}{=} \frac{(-1)^{n+1}a}{(n+1)!\,(a+n+1)} = \frac{-(-1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

et on obtient, en substituant,

$$P(a+1) = aP(a) - \frac{1}{e}.$$

L'intégration par parties donne

$$Q(a+1) = aQ(a) + \frac{1}{e}.$$

En ajoutant membre à membre ces deux relations, on retrouve la formule

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

qui est maintenant démontrée pour toutes les valeurs de l'argument positives ou négatives, réelles ou imaginaires.

La formule

$$P(a+1) = aP(a) - \frac{1}{e},$$

où l'on donne à a les valeurs a, $a+1$, ... $a+n$, donne lieu aux formules suivantes :

$$eP(a) = \frac{e}{a}P(a+1) + \frac{1}{a},$$

$$eP(a+1) = \frac{e}{a+1}P(a+2) + \frac{1}{a+1},$$

....

$$eP(a+n) = \frac{e}{a+n}P(a+n+1) + \frac{1}{a+n}.$$

Multiplions respectivement les deux membres de chacune de ces équations par $1, \frac{1}{a}, \dots \frac{1}{a(a+1)\dots(a+n-1)}$, et ajoutons membre à membre, il vient :

$$eP(a) = \frac{eP(a+n+1)}{a(a+1)\dots(a+n)} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \dots + \frac{1}{a(a+1)\dots(a+n)}.$$

La formule qui définit $P(a)$ montre que $\lim P(a+n+1) = 0$ lorsque n augmente indéfiniment, nous trouvons donc pour $P(a)$ le développement

$$eP(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{a(a+1)(a+2)} + \dots,$$

la série étant prolongée indéfiniment.

On peut aussi donner de la fonction Q un développement remarquable. Reprenons la forme générale

$$Q(a) = \int_{\omega}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

et posons

$$Q_n = \int_{\omega+n}^{\omega+n+1} x^{a-1} e^{-x} dx;$$

on a la série convergente

$$Q(a) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots$$

Posons

$$x = \zeta + \omega + n,$$

et il vient

$$Q_n = \int_0^1 (\omega + n + \zeta)^{a-1} e^{-\omega-n-\zeta} d\zeta$$

$$= e^{-\omega-n} \int_0^1 (\omega + n + \zeta)^{a-1} e^{-\zeta} d\zeta,$$

ou bien

$$Q_n = e^{-\omega-n}\int_0^1\left[(\omega+n)^{a-1}+\frac{a-1}{1}(\omega+n)^{a-2}\zeta+\ldots\right]e^{-\zeta}d\zeta$$

$$= e^{-\omega-n}\left[P(1)(\omega+n)^{a-1}+P(2)(\omega+n)^{a-2}\frac{a-1}{1}\right.$$

$$\left.+P(3)(\omega+n)^{a-3}\frac{(a-1)(a-2)}{1.2}+\ldots\right].$$

Posons maintenant

$$S(a)=\frac{\omega^a}{e^\omega}+\frac{(\omega+1)^a}{e^{\omega+1}}+\frac{(\omega+2)^a}{e^{\omega+2}}+\ldots,$$

et il vient

$$Q(a)=P(1)S(a-1)+\frac{a-1}{1}P(2)S(a-2)$$

$$+\frac{(a-1)(a-2)}{1.2}P(3)S(a-3)+\ldots,$$

série convergente pour toutes les valeurs de a quand on suppose $\omega>1$.

En effet, à partir d'une certaine valeur de n on a approximativement

$$S(a-n)=\frac{\omega^{a-n}}{e^\omega},\qquad P(n)<\frac{1}{n};$$

donc à partir de cette valeur de n les termes de la série sont plus petits que ceux du développement de $e^{-\omega}(\omega+1)^{a-1}$.

P(1), P(2) ... se calculent au moyen de la relation $P(a+1)=aP(a)-\frac{1}{e}$; la seule difficulté consiste dans le calcul de la fonction $S(a)$.

On avait remarqué depuis longtemps que la définition de la fonction gamma au moyen d'une intégrale définie était insuffisante. On avait vu ce qu'il y avait d'arbitraire à employer la relation fonctionnelle pour donner dans le cas des arguments négatifs un sens à cette fonction. C'est cette considération qui engagea Gauss

à prendre pour la définir le produit infini que nous allons bientôt rencontrer à la place de l'intégrale définie (*Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, p. 150 et suiv.).

Il était cependant intéressant de voir comment on pouvait, par une extension convenable de l'intégrale définie, arriver à la notion d'une fonction définitive dans tout le plan. Liouville avait remarqué que la définition de Legendre s'appliquait aux arguments à partie réelle positive. (*C. R.*, t. XXXV, p. 321.) Newman (*Camb. and Dublin Mathem.*, J., t., p. 57) s'était occupé de la détermination de $\Gamma(a)$, en particulier pour des valeurs négatives de a; il était arrivé à un résultat important, retrouvé depuis par Schlömilch, en partant de la décomposition de $\frac{1}{\Gamma(a)}$ en facteurs primaires donnée par Weierstrass (V. § 16).

En ce qui concerne l'étude directe de la fonction Γ comme intégrale définie, nous devons remarquer que déjà Euler, dans son *Calcul intégral* (t. IV, p. 323, 325), avait montré l'importance pour le développement en série de l'intégrale Eulérienne de première espèce de la décomposition en deux parties de l'intégrale définie qui représente cette fonction. Legendre (*Exerc.*, t. I, p. 239...) fut conduit à considérer les fonctions que nous avons appelées $P(a)$ et $Q(a)$. Il étudie en effet l'intégrale définie

$$\Gamma(a,x) = \int_0^x dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}$$

et, en posant $z = \left(l\frac{1}{x}\right)$, il donne le développement

$$\Gamma(a,x) = \Gamma(a) - z^a\left(\frac{1}{a} - \frac{z}{a+1} + \frac{1}{1.2}\frac{z^2}{a+2} - \ldots\right),$$

qui permet de calculer facilement la fonction $\Gamma(a,x)$ lorsque z est très petit, c'est-à-dire lorsque x est voisin de l'unité. Mais lorsque x est très petit, Legendre remarque qu'il faudra prolonger trop loin la suite pour obtenir une approximation déterminée. Il donne pour ce cas la suite suivante, plus simple à employer que

la précédente, malgré sa divergence :

$$\Gamma(a,x) = x[x^{a-1} + (a-1)x^{a-2} + (a-1)(a-2)2^{a-3} + \ldots].$$

Schlömilch (*Compendium...*, t. II, p. 261-266) a donné à l'intégrale

$$\int_0^{\omega} x^{a-1} e^{-x} dx$$

le nom de fonction gamma incomplète et a trouvé un développement applicable aux valeurs élevées de ω.

Hocevar (*Schlöm. Z.*, t. XXI, p. 449) établit la formule

$$\int_0^{\omega} x^{a-1} e^{-x} dx = \frac{\omega^a e^{-\omega}}{a}\left[1 + \frac{\omega}{a+1} + \frac{\omega^2}{(a+1)(a+2)} + \ldots\right],$$

utile pour les valeurs considérables de a et les valeurs petites de ω.

Dans un mémoire *Sul calcolo del valore della funzione* $\Sigma \frac{1}{\Gamma(x)}$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Naples*, Septembre 1867), M. de Gasparis s'était servi de la décomposition de l'intégrale $\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ en deux parties : $\int_0^{1} x^{a-1} e^{-x} dx$ et $\int_0^{x} x^{a-1} e^{-x} dx$ et avait tiré de cette considération plusieurs propriétés remarquables. Mais c'est à Prym (*J. de Cr.*, t. LXXXII) que l'on doit les résultats les plus remarquables qui peuvent se déduire de cette décomposition. « Les conséquences qui en découlent au point de vue de la conception de l'intégrale Eulérienne comme une fonction analytique avaient échappé à M. de Gasparis. Elles supposent, en effet, des notions moins connues alors qu'aujourd'hui sur la théorie générale des fonctions. » (Hermite, *Cours rédigé par Andoyer.*)

M. Hermite a mis en évidence (*J. de Cr.*, t. XC, p. 332 et *Cours rédigé par Andoyer*) l'importance des résultats obtenus par Prym. C'est à lui que l'on doit le développement de la fonction Q au moyen des fonctions P. (*J. de Cr.*)

Dans sa thèse sur le développement en séries des intégrales

Eulériennes, M. Bourguet a rassemblé les résultats dus à M. Prym et à M. Hermite sur les fonctions P et Q. C'est à lui que l'on doit le développement de $eP(a)$ en série de factorielles négatives.

Le calcul numérique de l'intégrale

$$\int_0^x \frac{e^{-\gamma_1 \lambda}}{(1+x)^{\lambda}}\, dx$$

présentait jusqu'alors des difficultés considérables pour le cas des grandes valeurs de γ_1 et de λ. M. Gylden (*C. R.*, XCII, p. 897 et 942) a montré comment l'application de la décomposition donnée par M. Hermite

$$Q(x) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots$$

facilitait ce calcul.

§ **6.** Il y a souvent avantage à substituer à la définition de la fonction gamma par une intégrale définie ou par les développements en série obtenus au moyen de cette intégrale, une autre définition qui s'obtient de la manière suivante :

Partons de l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{a-1}\, dx = \frac{1}{a},$$

où a désigne un nombre positif.

Changeons a en $a+1$; il vient

$$\int_0^1 x^a\, dx = \frac{1}{a+1}.$$

Retranchons ces deux égalités membre à membre, nous avons

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)\, dx = \frac{1}{a(a+1)}.$$

Répétons la même opération sur cette nouvelle égalité, nous obtiendrons

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^2\, dx = \frac{1.2}{a(a+1)(a+2)}.$$

et, en général

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^n dx = \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)}.$$

En posant $x = \frac{y}{n}$, cette égalité devient

$$\int_0^n y^{a-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy = \frac{n!\,n^a}{a(a+1)\dots(a+n)};$$

or, si l'on fait croître n indéfiniment $\left(1-\frac{y}{n}\right)^n$ a pour limite e^{-y} et par suite le premier membre a pour limite $\Gamma(a)$, on a donc

$$\Gamma(a) = \lim\left[\frac{n!\,n^a}{a(a+1)\dots(a+n)}\right]_{n=\infty}.$$

ou encore si l'on veut

$$\Gamma(a) = \lim\left[\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\dots\left(1+\frac{a}{n}\right)}\right]_{n=\infty}.$$

On peut prendre cette formule pour définition de la fonction Γ; cette définition a l'avantage de présenter une signification bien déterminée, quelle que soit la valeur positive ou négative, réelle ou imaginaire de a.

En effet, on peut écrire cette formule

$$l\Gamma(a) = a\ln - \left[la + l\left(1+\frac{a}{1}\right) + \dots + l\left(1+\frac{a}{n}\right)\right];$$

pour s'affranchir de l'indétermination relative aux valeurs multiples des logarithmes, on convient d'adopter, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de a, la valeur du logarithme qui s'évanouit lorsque l'argument est égal à l'unité.

On a identiquement

$$l\,n = l\frac{2}{1} + l\frac{3}{2} + \dots + l\frac{n}{n-1}.$$

et il vient, en substituant et ajoutant la aux deux membres,

$$\begin{aligned} la\Gamma(a) = &\left[a\,l\frac{2}{1} - l\left(1+\frac{a}{1}\right)\right] \\ &+\left[a\,l\frac{3}{2} - l\left(1+\frac{a}{2}\right)\right] \\ &+ \ldots \\ &+\left[a\,l\left(1+\frac{1}{n}\right) - l\left(1+\frac{a}{n}\right)\right] \\ &+ \ldots \quad = \sum_{1}^{\infty}\left[a\,l\left(1+\frac{1}{n}\right) - l\left(1+\frac{a}{n}\right)\right], \end{aligned}$$

la série étant prolongée indéfiniment.

Considérons le terme général de cette série

$$u_n = a\,l\left(1+\frac{1}{n}\right) - l\left(1+\frac{a}{n}\right);$$

si l'on suppose n supérieur au module de a, on peut développer en séries convergentes les deux logarithmes, et il vient

$$\begin{aligned} u_n &= a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \ldots\right) - \left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + \ldots\right) \\ &= \frac{a(a-1)}{2n^2} + \ldots \quad = \frac{a(a-1)}{2n^2}(1+\varepsilon), \end{aligned}$$

ε étant une quantité qui a pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment. On voit donc que, à partir d'un rang suffisamment éloigné, les termes de la série décroissent comme les termes de la série $\Sigma\frac{1}{n^2}$; la série est donc toujours convergente, et par suite aussi le produit infini qui sera employé comme définition de la fonction gamma.

Remarquons que l'expression de $la\Gamma(a)$ met aussi en évidence l'existence des pôles de la fonction gamma. Pour chacun des pôles un des termes de la série devient infini.

La nouvelle définition que nous venons de donner de la fonction gamma donne une vérification immédiate de la relation fonctionnelle.

En ce qui concerne la relation des compléments, on obtient, en remplaçant les facteurs $\Gamma(a)$ et $\Gamma(1-a)$ par les produits dont ces fonctions sont les limites

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \lim \frac{(n!)^2 n}{a(a+1)\dots(a+n)(1-a)(2-a)\dots(n+1-a)}$$
$$= \lim \frac{n}{n+1-a} \frac{1}{a\left(1-\frac{a^2}{1}\right)\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\dots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)};$$

mais $\frac{n}{n+1-a}$ a pour limite l'unité lorsque n augmente indéfiniment; d'autre part, on a la formule connue

$$\sin a\pi = a\pi\left(1-\frac{a^2}{1}\right)\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\dots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right),$$

et il vient

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

L'expression $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ résulte immédiatement aussi de cette définition et de l'expression de $\frac{\pi}{2}$ sous forme de produit infini donnée par Wallis.

Posons

$$\pi(\mu, a) = \frac{\mu!\,\mu^a}{(a+1)(a+2)\dots(a+\mu)},$$

en sorte que

$$\pi(\infty, a) = a\Gamma(a) = \Gamma(a+1);$$

on vérifie immédiatement l'identité

$$n^{na}\frac{\pi(\mu,a)\,\pi\left(\mu,a-\frac{1}{n}\right)\dots\pi\left(\mu,a-\frac{n-1}{n}\right)}{\pi(n\mu,na)} = \frac{(\mu!)^n\, n^{n\mu}}{n\mu!\,\mu^{\frac{n-1}{2}}};$$

le premier membre est donc indépendant de a; pour avoir sa valeur il suffira de donner à a une valeur particulière. Or on a

$$\pi(\mu, 0) = 1,$$

et en faisant $a = 0$, le premier membre devient

$$\pi\left(\mu, -\frac{1}{n}\right)\pi\left(\mu, -\frac{2}{n}\right)\ldots\pi\left(\mu, -\frac{n-1}{n}\right),$$

et en faisant croître μ indéfiniment

$$\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{n}} n^{-\frac{1}{2}},$$

et l'on a enfin

$$\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\Gamma(a+1)}{\Gamma(na+1)}\, n^{na} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}$$

ou bien à cause de la formule

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n^{-na}\Gamma(na).$$

Gauss, dans son mémoire intitulé « *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$$1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots »$$

a pris la formule

$$\Gamma(a) = \lim\left[\frac{n!\,n^a}{a(a+1)\ldots(a+n)}\right]_{n=\infty}$$

pour définition de la fonction $\Gamma(a)$ qu'il appelle $\Pi(a-1)$, préférant cette définition qui présente un sens pour toutes les valeurs de l'argument a à la définition par une intégrale définie. Les raisons qui l'ont guidé sont exposées par lui dans ses lettres à Bessel, en particulier dans sa lettre du 21 novembre 1811 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, p. 152). Il est juste cependant de remarquer que, si Gauss a eu le mérite de mettre en évidence l'importance de ce mode de détermination de la fonction

gamma, la formule même d'où il est parti était déjà connue d'Euler. Dès ses premiers travaux sur l'interpolation de la série

$$1, 2, 6, 24, 120,$$

Euler était arrivé à une formule qui coïncide avec la définition prise par Gauss. La correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e^ siècle, publiée en 1843 par P. H. Fuss, nous donne à ce sujet des renseignements précieux.

En 1728 et 1729, Goldbach et D. Bernoulli s'occupaient de la détermination des termes généraux des séries et de l'interpolation des suites, en particulier de celle-ci

$$1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 + \ldots$$

Euler, alors à Saint-Pétersbourg, eut connaissance par D. Bernoulli des recherches de Goldbach et c'est à cette occasion que commença entre Euler et ce dernier, en 1729, une correspondance qui dura jusqu'à la mort de Goldbach, en 1764. Les premières de ces lettres sont si importantes pour l'histoire de la théorie de la fonction gamma, que nous avons cru devoir en transcrire les passages les plus importants.

« Petropoli, d. 13 octobr. A. 1729.

» Cum nuper in nonnulla incidissem, quæ ad interpolandas » series, legem, uti appellare soles variabilem habentes, facere » visa sunt, ea accuratius contemplatus sum, et multa, quæ huc » attinent, detexi. Quæ, quia tibi, vir celeberrime, placitura esse » mihi significavit Clarissimus Bernoulli, Tibi scribere, Tuoque » submittere judicio statui. Hujus seriei 1, 2, 6, 24, 120, etc., » quam a Te multum tractatam esse vidi, hunc inveni terminum » generalem

$$\frac{1\,2^m}{1+m} \cdot \frac{2^{1-m}\,3^m}{2+m} \cdot \frac{3^{1-m}\,4^m}{3+m} \cdot \frac{4^{1-m}\,5^m}{4+m}, \text{ etc.},$$

» ex infinito factorum numero constantem, qui terminum ordine » m^{mum} exprimit. Is quidem in nullo casu abrumpitur, et æque si » m est numerus integer, tantum ad verum magis magisque

» accedit, ac si m fuerit fractus. Sed tamen per eum admodum » prope quemque terminum invenire licet, idque eo facilius, quo » minus assumatur m. Si autem aliquot solum uti visum sit, » factoribus, termino generali commodior induci potest forma : » ut si duobus prioribus factoribus contenti esse velimus, habe- » bitur $\frac{1.2}{(1+m)(2+m)}3^m$ pro termino ordine m. Sin autem » generaliter n factores capiantur, sequentibus reliquis neglectis, » erit terminus generalis $\frac{1.2.3...\ n}{(1+m)(2+m)...(n+m)}(n+1)^m$, » qui quo major accipitur numerus n, eo propius ad verum » accedet. Communicavi hæc cum Clar. Bernoulli, qui peculiari » modo eundem fere postremum eruit terminum, in hoc a meo » diversum, quod aliam potestatem loco $(n+1)^m$ adhibeat, in » qua determinanda fortasse factorum neglectorum rationem » habuit. Credo ipsum Tibi nuper inde deductum numerum » termino seriei, cujus index est $1\frac{1}{2}$, proximum misisse (1).

» ... Terminum hunc generalem ex eo inveni fundamento, quod » hæc series 1, 2, 6, 24, etc. in infinitum continuata tandem » evadit geometrica. Et hujusmodi terminos generales etiam pro » aliis seriebus, quæ in infinitum cum geometricis confunduntur » exhibere in promtu est. Sed cum hoc modo termini intermedii » non nisi veris proximi inveniantur, omissa hac serierum tractan- » darum ratione, aliter in hac re versari cœpi, in id intentus, ut » terminos intermedios non tantum veris proximos, sed ipsos » veros, si fieri posset, invenirem... »

Dans sa réponse, Goldbach essaie de fournir une démonstration de la formule donnant le terme général et se propose d'étendre à

(1) En effet, dans une lettre datée du 6 octobre 1729, D. Bernoulli s'exprime ainsi : « Voici le terme général pour la suite $1+1.2+1\,2.3+$ etc... Soient x l'ex- » posant du terme et A un nombre infini, je dis que le terme général sera

$$\left(A+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdot\ \cdots\ \frac{A}{A-1+x}\right).$$

» Si, au lieu de prendre A infiniment grand, on le fait = à un nombre un peu » grand, on aura le terme général à peu près. »

Dans une lettre du 20 octobre, D. Bernoulli remarque lui-même que sa formule doit être corrigée.

d'autres suites, le résultat obtenu par Euler. Le 8 janvier 1730, Euler lui adressa une nouvelle lettre.

« Quæ nuper de methodo mea progressionum terminos medios » ex quadraturis inveniendi scripsi, ea non ope serierum infini- » tarum terminos illos exprimentium perficio, maxime enim » arduum esse arbitror de quaque serie infinita, ad quam perti- » neat quadraturam pronunciare; quanquam non negem, me » primo ex serie terminum generalem progressionis $1 + 2 + 6$ » $+ 24 +$ etc. exhibente, quam Tibi, Vir Celeberrime, perscripsi, » conclusisse terminum ordine $\frac{1}{2}$ a quadratura circuli pendere. » Deinde autem eodem modo circa alias progressiones versari » diffidens id meditatus sum, quomodo alia via eodem pervenire » possim quæ non seriebus dignoscendis contineatur. In aliam » igitur atque novam incidi rationem progressionum terminis » generalibus denotandarum. Ea in hoc consistit, ut formulas » integrales in terminos generales recipiam.... Fundamenti loco » mihi fere fuit hæc progressio $1 + 1.2 + 1.2.3 +$ etc., cujus » terminus generalis mihi inventus est $\int dx\,(-lx)^n \ldots$. »

Nous voyons donc qu'Euler avait trouvé la formule que Gauss a prise depuis comme définition; mais nous reconnaissons aussi qu'il ne s'en est pas tenu à son premier résultat et qu'il a préféré la représentation par une intégrale définie. C'est à ce dernier point de vue qu'il s'est placé dans son premier mémoire sur les fonctions qui nous occupent (*Comm. Ac. Petr.*, t. V, p. 36).

La série

$$la\Gamma(a) = \sum_{1}^{\infty}\left[a l(1+n) - l\left(1+\frac{a}{n}\right)\right],$$

qui se déduit si facilement de la définition de la fonction gamma, est une simple transformation d'une formule due à Gudermann (*J. de Cr.*, t. XXIX, p. 209) (V. § 11). La formule de Gudermann est de la dernière importance dans cette théorie et, comme le remarque Liouville (*C. R.*, t. XXXV, p. 319), on l'y rencontre presque à chaque pas.

Nous sommes partis de la définition par une intégrale définie pour arriver à la définition de Gauss; une quelconque des intégrales définies du § 1 aurait pu être employée, avec quelques légères modifications de détail.

Gauss a naturellement suivi le procédé inverse et a montré que l'on pouvait repasser du produit infini à l'intégrale définie (*Werke*, t. III, p. 151). Voir aussi *Genocchi* (*Bull. Ac. de Belg.*, t. XXI, p. 84).

§ 7. L'expression de $\Gamma(a)$ sous forme de produit conduit à une série donnant $l\Gamma(a+1)$ développée suivant les puissances de a.

En changeant a en $a+1$, on a

$$\Gamma(a+1)=\frac{n!\,n^{a+1}}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)},$$

ou bien, en remarquant que $\frac{n}{a+n+1}$ a pour limite l'unité,

$$\Gamma(a+1)=\frac{n^a}{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\dots\left(1+\frac{a}{n}\right)},$$

d'où l'on déduit

$$(1)\quad l\Gamma(a+1)=a\,ln-l\left(1+\frac{a}{1}\right)-l\left(1+\frac{a}{2}\right)-\dots-l\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

où l'on suppose que le nombre entier n augmente indéfiniment.

Si l'on suppose a moindre que l'unité, on peut développer les logarithmes qui figurent au second membre en séries ordonnées suivant les puissances de a, et l'on obtient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} l\Gamma(a+1)=&-a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\dots+\frac{1}{n}-ln\right)\\ &+\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\dots+\frac{1}{n^2}\right)\\ &-\frac{a^3}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\dots+\frac{1}{n^3}\right)\\ &+\dots, \end{aligned}\right.$$

et en posant pour une valeur infinie de n

$$S_p = \lim\left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p}\right), \tag{3}$$

et

$$\gamma = \lim\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n} - ln\right), \tag{4}$$

on a enfin

$$l\Gamma(a+1) = -\gamma a + \frac{1}{2}S_2 a^2 - \frac{1}{3}S_3 a^3 + \frac{1}{4}S_4 a^4 - \ldots \tag{5}$$

Cette séric est évidemment convergente pour toute valeur de a inférieure à l'unité; les coefficients qui apparaissent dans ce développement ont été calculés très exactement; on a d'une part

$$\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 015328. \tag{6}$$

Les coefficients S sont donnés dans le tableau suivant jusqu'à S_{35} avec seize décimales exactes

n	S_n	n	S_n
2	1,64493 40668 482264	19	1,00000 19082 127166
3	1,20205 69031 595943	20	1,00000 09539 620339
4	1,08232 32337 111382	21	1,00000 04769 329868
5	1,03692 77551 433700	22	1,00000 02384 505027
6	1,01734 30619 844491	23	1,00000 01192 199260
7	1,00834 92773 819227	24	1,00000 00596 081891
8	1,00407 73561 979443	25	1,00000 00298 035035
9	1,00200 83928 260822	26	1,00000 00149 915548
10	1,00099 45751 278180	27	1,00000 00074 507118
11	1,00049 41886 041194	28	1,00000 00037 253340
12	1,00024 60865 533080	29	1,00000 00018 626597
13	1,00012 27133 475785	30	1,00000 00009 313274
14	1,00006 12481 550587	31	1,00000 00004 656629
15	1,00003 05882 363070	32	1,00000 00002 328312
16	1,00001 52882 594086	33	1,00000 00001 164155
17	1,00000 76371 976379	34	1,00000 00000 582077
18	1,00000 38172 932650	35	1,00000 00000 291038

On peut donner au développement de $l\Gamma(a+1)$ une autre forme beaucoup plus convergente, en éliminant les sommes dont l'indice est pair :

En effet, on déduit des deux formules

$$l\Gamma(1+a) = -\gamma a + \frac{1}{2}S_2 a^2 - \frac{1}{3}S_3 a^3 + \frac{1}{4}S_4 a^4 - \dots$$

$$l\Gamma(1-a) = \quad \gamma a + \frac{1}{2}S_2 a^2 + \frac{1}{3}S_3 a^3 + \frac{1}{4}S_4 a^4 + \dots$$

en tenant compte de la relation des compléments

$$\frac{1}{2}l[\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)] = \frac{1}{2}l\frac{a\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{2}S_2 a^2 + \frac{1}{4}S_4 a^4 + \dots,$$

et on obtient, en substituant dans la formule qui donne $l\Gamma(a+1)$:

$$(7) \quad l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2}l\frac{a\pi}{\sin a\pi} - \left(\gamma a + \frac{1}{3}S_3 a^3 + \frac{1}{5}S_5 a^5 + \dots\right).$$

Il est encore possible d'augmenter la convergence en ajoutant aux deux membres les deux membres de l'équation identique

$$0 = -\frac{1}{2}l\frac{1+a}{1-a} + a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \dots$$

et l'on a alors

$$(8) \quad \begin{cases} l\Gamma(1+a) = \dfrac{1}{2}l\dfrac{a\pi}{\sin a\pi} - \dfrac{1}{2}l\dfrac{1+a}{1-a} + a(1-\gamma) \\ \qquad\qquad + \dfrac{a^3}{3}(1-S_3) + \dfrac{a^5}{5}(1-S_5) + \dots, \end{cases}$$

et on a ainsi une série très convergente pour les petites valeurs de a.

C'est à Euler que l'on doit le développement de la fonction $l\Gamma(1+a)$ en série convergente (*Calc. diff.*, p. 800). Legendre donna les formules plus convergentes (7) et (8) (*Exerc. d'An.*, t. I, p. 296).

Les valeurs de S_2, S_3, ... avaient été données par Euler (*Calc. Diff.*, p. 456) jusqu'à S_{16} avec seize décimales; mais Legendre

ayant trouvé dans la table d'Euler quelques erreurs assez graves, la calcula de nouveau et donna le tableau que nous avons reproduit. (Legendre, *Exerc.*, t. II, p. 65.)

La quantité γ qui se présente dans le développement de $l\Gamma(a+1)$ est, après les nombres π et e, une des constantes les plus importantes que l'on rencontre en analyse.

On la désigne en général sous le nom de constante d'Euler.

On l'a aussi appelée constante de Mascheroni (Bauer, *J. de Cr.*, t. LVII, p. 128. — Mellin, *Ofversigt* ... 1883, p. 19) ou encore constante du logarithme intégral.

On a employé également pour la représenter bien des notations :

Euler, Legendre, Lindman, ... ont choisi la lettre C;

Euler l'a aussi désignée par la lettre O;

Bierens de Haan, dans ses *Tables d'intégrales définies*, se sert de la lettre A;

Mascheroni avait pris la notation γ qui présente l'avantage de rappeler l'importance de cette constante dans la théorie de la fonction Γ, sans donner lieu à aucune ambiguïté.

Comme le remarque Glaisher (*On the history of Euler's constant*, — *Mess. of Math.*, t. I,, 1872), à qui nous empruntons bon nombre des renseignements qui vont suivre, cette constante doit son importance tout d'abord à son apparition à l'une des périodes les plus remarquables de l'histoire des mathématiques et dans l'étude de la série harmonique, et aussi à son emploi dans la théorie de la fonction gamma, du logarithme intégral, du cosinus intégral, ...

Dans la première moitié du XVIII^{e} siècle la théorie des séries infinies commença à exciter l'attention des géomètres; Euler et les Bernoulli écrivirent de nombreux mémoires sur ce sujet. La série harmonique en particulier les occupa à maintes reprises pendant cette période; elle était remarquable en ce sens que seule de la suite des séries $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots$ elle était divergente.

Jean Bernoulli (*Ars conjectandi*, p. 250) attribue à son frère la découverte de la divergence de la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, mais

c'est Euler qui établit le premier la relation qui existe entre la somme $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}$ et lx. Dans un mémoire « *De progressionibus harmonicis observationes* » (*Com. Ac. Petr.*, t. VII, 1734-1735, p. 156), il part de la formule

$$\frac{1}{i}=l\frac{i+1}{i}+\frac{1}{2}\frac{1}{i^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{i^3}+\frac{1}{4}\frac{1}{i^4}-\ldots,$$

et en déduit en faisant successivement $i=1, 2, \ldots i$ et ajoutant membre à membre les résultats obtenus

$$(9)\qquad \begin{cases} 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}=l(i+1)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots\right) \\ \qquad\qquad -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)+\ldots, \end{cases}$$

d'où

$$\gamma=\frac{1}{2}S_2-\frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4-\ldots;$$

il trouve par approximation

$$\gamma=0{,}577218.$$

En 1769 (*N. Comm.*, t. XIV, p. 153), Euler revint sur cette question et établit une série que nous rencontrerons plus tard (§ 13) :

$$(10)\quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{x}=\gamma+lx+\frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2x^2}+\frac{B_2}{4x^4}-\frac{B_3}{6x^6}+\ldots,$$

où les quantités B sont les nombres de Bernoulli. En faisant $x=10$, il trouve

$$\gamma=0{,}57721\ 56649\ 015325.$$

Il donne aussi alors la formule

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)+\ldots$$

Enfin, en 1781 (*Acta Petr.*, t. V, P. II, p. 45), il communique un nouveau mémoire, *De numero memorabili in summatione progressionis harmonicæ naturalis occurrenti*, où il cherche d'abord,

mais sans succès, à reconnaître si γ n'est pas le logarithme d'un nombre remarquable. Ne pouvant réussir à relier ainsi γ à une autre constante, Euler établit quelques nouvelles formules pour γ, donnant comme raison la loi compliquée que suivent les nombres de Bernoulli.

Les développements nouveaux auxquels il arrive sont les suivants :

$$(11)\qquad 1-\gamma=\frac{1}{2}(S_2-1)+\frac{1}{3}(S_3-1)+\frac{1}{4}(S_4-1)+\ldots$$

$$(12)\qquad 2\gamma-1=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}S_2\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}S_4\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{2}{7}S_6\right)+\ldots$$

$$(13)\ 2-2l2-\gamma=\left(\frac{2}{3}\frac{7}{8}S_2-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\frac{31}{32}S_4-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{7}\frac{127}{128}S_6-\frac{2}{7}\right)+\ldots$$

$$(14)\ 1-2l2+\gamma=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{2}{3.2^3}S_2\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\frac{2}{5.2^5}S_4\right)+\ldots$$

$$(15)\qquad l2-\gamma=\frac{1}{3.2^2}S_2+\frac{1}{5.2^4}S_4+\frac{1}{7.2^6}S_6+\ldots$$

$$(16)\ 1-l\frac{3}{2}-\gamma=\frac{1}{3.2^2}(S_2-1)+\frac{1}{5.2^4}(S_4-1)+\frac{1}{7.2^6}(S_6-1)+\ldots$$

Euler calcule au moyen de (11) γ avec 5 décimales exactes, au moyen de (16) avec 12 décimales.

Mascheroni, dans ses *Adnotationes ad Euleri Calculum Integralem*, étendit le calcul jusqu'à 32 décimales :

$$\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86061\ 81120\ 90082\ 39.$$

Cette valeur fut reproduite par Lacroix (*Calc. D. et I.*, t. III, p. 521).

En 1809, Soldner publia à Munich sa *Théorie d'une nouvelle fonction transcendante*. Cette fonction n'est autre que le logarithme intégral

$$li\,x=\int_0^x\frac{dx}{lx}=\gamma+l.lx+lx+\frac{(lx)^2}{2}+\ldots$$

Soldner donne pour la constante d'Euler

$$\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 6065,$$

et cette valeur diffère de celle de Mascheroni à partir de la vingtième décimale.

Gauss fut alors amené à refaire faire le calcul par F. C. B. Nicolaï (*Werke*, t. III, p. 154, *Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, p. 150).

L'emploi de la formule (10) pour $x = 50$ et $x = 100$ fournit γ avec 40 décimales exactes.

La valeur donnée par Soldner était vérifiée. Cependant le nombre donné par Mascheroni fut encore reproduit. Dans son supplément au dictionnaire de Klügel, Grünert donna les deux valeurs.

Lindman, ne connaissant point le calcul de Nicolaï, fut conduit à calculer de nouveau la constante (*Grün. Arch.*, t. XXIX, p. 238); il emploie la formule (10) et obtient γ à 24 décimales exactes en faisant $x = 20$, à 34 décimales exactes en faisant $x = 100$.

Quatre ans plus tard, Oettinger recommença encore le même calcul. La même formule (10) lui donna γ avec 18, 25, 34 et 41 décimales exactes en y faisant successivement $x = 10$, 20, 50 et 100 (*J. de Cr.*, t. X, p. 375).

Enfin Shanks (*Proc. Roy. Soc.*, t. XV, p. 429) calcula γ avec 21, 28, 39, 46, 54, 59 et 59 décimales, en faisant x égal à 10, 20, 50, 100, 200, 500 et 1000.

Le même calculateur continua ses calculs et donna successivement γ avec 80 décimales (*Proc. Roy. Soc.*, t. XVI, p. 154 et 299) et avec 110 décimales (*l. c.*, t. XIX, p. 29); mais, d'après Glaisher (*l. c.*, t. XIX, p. 514), les résultats de Shanks ne sont justes que jusqu'à la 59^{me} décimale. On a

$$\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082$$
$$40243\ 10421\ 59335\ 93992\ 35988\ 0577\ldots$$

Dans ses *Exercices d'Analyse*, Legendre remarque que le

développement de $l\Gamma(a+1)$ donnera γ lorsque l'on prendra pour a une valeur telle que $l\Gamma(a+1)$ soit connu.

Il arrive ainsi à la formule (16) et à la suivante :

$$(17) \qquad 1-\gamma=\frac{1}{2}l2+\frac{1}{3}(S_3-1)+\frac{1}{5}(S_5-1)+\ldots$$

Il donne également

$$(18) \qquad \gamma=l\frac{4}{\pi}+\frac{1}{2}S_2\frac{1}{2}-\frac{1}{3}S_3\frac{1}{4}+\frac{1}{4}S_4\frac{1}{8}-\ldots$$

Remarquons encore que Bretschneider (*J. de Cr.*, t. XIX, p. 260) a attribué à Kramp la valeur donnée par Mascheroni, mais c'était probablement par erreur, puisque, plus tard, Bretschneider lui-même, faisant allusion à l'erreur, parle du calcul de Mascheroni (*Zeits. f. M. und Ph.*, t. VI, p. 231). Glaisher a cherché dans les travaux de Kramp, sans trouver de trace du calcul de γ.

§ **8.** On a trouvé précédemment que

$$(1) \qquad \Gamma(a)=\mu^a\frac{1.2.3\ldots\mu}{a(a+1)\ldots(a+\mu)},$$

en supposant que, dans le second membre, le nombre entier μ augmente indéfiniment, on en conclut

$$(2) \quad l\Gamma(a)=al\mu+l(1.2.3\ldots\mu)-la-l(a+1)-\ldots-l(a+\mu),$$

et par suite, en posant

$$(3) \qquad \psi(a)=\frac{d}{da}l\Gamma(a),$$

$$(4) \quad \psi(a)=l\mu-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}-\ldots-\frac{1}{a+\mu}, \qquad (\mu=\infty).$$

On a en particulier, en faisant $a=1$,

$$(5) \qquad \psi(1)=l\mu-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{\mu+1}=-\gamma.$$

c'est-à-dire que $\psi(1)$ est égale à la constante d'Euler que nous avons déjà rencontrée changée de signe :

$$\psi(1) = -0{,}5772156649\ldots$$

La fonction $\frac{d}{da} l\Gamma(a)$ a été désignée par Gauss (*Werke*, t. III, p. 152) par le symbole $\Psi(a+1)$; Legendre (*Exerc.*, t. II, p. 16 et p. 52) se sert de $\varphi(a)$ et $Z'(a)$; Bierens de Haan a employé cette dernière notation dans ses *Tables d'intégrales définies*. Binet (*J. Ec. Pol.*, cah. 27) a employé le symbole $\lambda'(a)$. Cauchy, Gudermann, et la plupart des géomètres ont employé depuis le signe ψ. La formule (4) a été établie d'une façon différente par Legendre (*Exerc.*, t. II, p. 17) et par Gudermann (*J. de Cr.*, t. XXIX, p. 208).

Aux relations qui existent entre les fonctions gamma correspondent des relations entre les fonctions ψ.

La relation

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

donne, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres

$$\psi(a+1) = \psi(a) + \frac{1}{a}, \tag{6}$$

et plus généralement, en désignant par n un nombre entier,

$$\psi(a+n) = \psi(a) + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \ldots + \frac{1}{a+n-1}. \tag{7}$$

La relation

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

donne de même

$$\psi(a) - \psi(1-a) = -\pi \cot a\pi. \tag{8}$$

Enfin, la relation de Gauss

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}n^{-na}\Gamma(na)$$

fournit par la même méthode la relation

$$(9)\quad \psi(a)+\psi\left(a+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\psi\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=n\psi(na)-nln.$$

La formule

$$(10)\qquad \psi(a+n)=\psi(a)+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\ldots+\frac{1}{a+n-1}$$

peut être considérée comme un cas particulier d'une formule plus générale.

En posant

$$\psi(a+x)=\alpha+\beta x+\gamma x(x-1)+\delta x(x-1)(x-2)+\ldots,$$

on peut déterminer α, β, γ ..., par la méthode des coefficients indéterminés.

En faisant $x=0$, on a tout d'abord

$$x=\psi(a).$$

En changeant x en $x+1$ et désignant par le signe $\Delta\varphi(x)$ l'accroissement qui en résulte pour une fonction quelconque $\varphi(x)$, on a

$$\begin{aligned}\Delta\psi(a+x)&=\psi(a+x+1)-\psi(a+x)\\&=\frac{d}{dx}[l\Gamma(a+x+1)-l\Gamma(a+x)]\\&=\frac{d}{dx}l(a+x)=\frac{1}{a+x};\end{aligned}$$

d'autre part

$$\Delta x=1,\quad \Delta x(x-1)=2x,\quad \Delta x(x-1)(x-2)=3x(x-1)\ldots,$$

et il vient

$$\frac{1}{a+x}=\beta+2\gamma x+3\delta x(x-1)+4\varepsilon x(x-1)(x-2)+\ldots$$

En faisant $x = 0$, on en déduit

$$\beta = \frac{1}{a}.$$

Prenant de nouveau les accroissements des deux membres, on aura :

$$\Delta \frac{1}{a+x} = 2\gamma + 2.3\delta x + 3.4\varepsilon x(x-1) + \ldots,$$

$$\Delta^2 \frac{1}{a+x} = 2.3\delta + 2.3.4\varepsilon x + \ldots,$$

$$\Delta^3 \frac{1}{a+x} = 2.3.4\varepsilon + \ldots,$$

et en faisant $x = 0$

$$2\gamma = \Delta \frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a(a+1)},$$

$$2.3\delta = \Delta^2 \frac{1}{a} = -\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{a(a+1)} = \frac{2}{a(a+1)(a+2)},$$

$$2.3.4\varepsilon = \Delta^3 \frac{1}{a} = \frac{2}{(a+1)(a+2)(a+3)} - \frac{2}{a(a+1)(a+2)}$$

$$= \frac{-3.2}{a(a+1)(a+2)(a+3)}.$$

La loi est évidente et l'on a

$$(11) \quad \psi(a+x) = \psi(a) + \frac{x}{a} - \frac{x(x-1)}{2a(a+1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3a(a+1)(a+2)} - \ldots$$

Si l'on donne à x une valeur entière et positive n, le second membre ne contient qu'un nombre limité de termes, et l'on a

$$\psi(a+n) = \psi(a) + \frac{n}{a} - \frac{n(n-1)}{2a(a+1)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3a(a+1)(a+2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)a(a+1)\ldots(a+n+1)},$$

et, comparant à la formule (10), on a l'identité

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\ldots+\frac{1}{a+n+1}=\frac{n}{a}-\frac{n(n-1)}{2a(a+1)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^n n!}{(n+1)a(a+1)\ldots(a+n+1)},$$

qu'il est facile de vérifier.

Le développement trouvé pour $\psi(a+x)$ conduit, en y faisant $a=1$ et $x=a$, à une formule d'où l'on tire facilement l'expression de la fonction ψ par une intégrale définie.

On a

$$(12)\quad \psi(1+a)=\psi(1)+a-\frac{1}{2}\frac{a(a-1)}{2}+\frac{1}{3}\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}-\ldots;$$

or, on a

$$(1-x)^a=1-ax+\frac{a(a-1)}{1.2}x^2-\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots,$$

et par suite

$$\frac{1-(1-x)^a}{x}=a-\frac{a(a-1)}{1.2}x+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^2-\ldots,$$

et par conséquent

$$(13)\qquad \psi(1+a)=\psi(1)+\int_0^1\frac{1-(1-x)^a}{x}\,dx,$$

ou bien, en posant $y=1-x$,

$$(14)\qquad \psi(1+a)=\psi(1)+\int_0^1\frac{y^a-1}{y-1}\,dy.$$

Cette formule peut s'obtenir sans avoir recours au développement de ψ.

On a

$$(15)\qquad \psi(x)=l\mu-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\ldots-\frac{1}{x+\mu},$$

en supposant que dans le second membre μ augmente indéfiniment.

Dans ces conditions on peut aussi écrire :

$$(16) \qquad \psi(x) = l\mu - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \ldots - \frac{1}{x+\mu-1}.$$

$\psi(x)$ se présente comme la différence des deux quantités que l'on peut exprimer par des intégrales définies.

En effet, en ce qui concerne $l\mu$, il suffit de remarquer que $l\mu$ peut être considérée comme la différence des valeurs que prend la fonction $l\frac{1-z^{\mu}}{1-z}$ pour $z=1$ et $z=0$ pour en déduire

$$(17) \qquad l\mu = \int_0^1 dl\,\frac{1-z^{\mu}}{1-z} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-z} - \frac{\mu z^{\mu-1}}{1-z^{\mu}}\right) dz.$$

D'autre part, on a, en effectuant la division,

$$(18) \qquad \int_0^1 \frac{z^{x-1} - z^{x+\mu-1}}{1-z}\,dz = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+\mu-1},$$

et il vient

$$\psi(x) = \int_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz + \lim\left[\int_0^1 \left(\frac{z^{x+\mu-1}}{1-z} - \frac{\mu z^{\mu-1}}{1-z^{\mu}}\right) dz\right]_{\mu=\infty}.$$

Le second terme est indépendant de x; si on y change, en effet, x en $x+\alpha$, l'accroissement qui en résulte est égal à

$$\int_0^1 \frac{z^{x+\alpha+\mu-1} - z^{x+\mu-1}}{1-z}\,dz = \int_0^1 \frac{z^{x+\mu-1}(z^{\alpha}-1)}{1-z}\,dz,$$

dont la valeur est nulle évidemment lorsque μ est infini.

On a donc enfin

$$(19) \qquad \psi(x) = c + \int_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz,$$

ou en faisant $x=1$, on trouve $c=\psi(1)$. En posant $x=1+\alpha$ on retrouve la formule (14).

La formule

$$\psi(x) = \psi(1) + \int_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz$$

montre que si x est rationnel, $\psi(x)-\psi(1)$ peut se calculer sous forme finie. On a par exemple

$$\psi\left(\frac{3}{2}\right)=\psi(1)+\int_0^1\frac{1-\sqrt{z}}{1-z}\,dz=\psi(1)+2-l2,$$

$$\psi\left(\frac{4}{3}\right)=\psi(1)+\int_0^1\frac{1-z^{\frac{1}{3}}}{1-z}\,dz=\psi(1)+3-\frac{3}{2}\,l3-\frac{\pi}{6}\sqrt{3}.$$

Legendre avait donné (*Exerc.*, t. II, p. 46) une démonstration peu satisfaisante de la formule (14). Elle a été établie depuis de bien des manières.

Cauchy, *J. Ec. Pol.*, t. XVIII, p. 147.
Cisa de Crésy, *Mém. Turin*, 1821, p. 209.
Lobatschewsky, *Mém. Kasan*, 1835.
Schlömilch, *Gr. Arch.*, t. IV, p. 167.
— — t. IX, p. 5.
— *Studien*, I, p. 6.

Des formules

$$(20)\qquad\begin{cases}\psi(1+a)=\psi(1)+\displaystyle\int_0^1\frac{z^a-1}{z-1}\,dz,\\ \psi(1+b)=\psi(1)+\displaystyle\int_0^1\frac{z^b-1}{z-1}\,dz,\end{cases}$$

on déduit par soustraction

$$(21)\qquad\int_0^1\frac{z^a-z^b}{1-z}\,dz=\psi(1+b)-\psi(1+a),$$

et par conséquent

$$\int_0^1\frac{z^{-a}-z^a}{1-z}\,dz=\psi(1+a)-\psi(1-a)=\frac{1}{a}+\psi(a)-\psi(1-a)$$

ou bien

$$(22)\qquad\int_0^1\frac{z^{-a}-z^a}{1-z}\,dz=\frac{1}{a}-\pi\cot a\pi.$$

En multipliant les deux membres par da et intégrant de 0 à a, on aura

$$(23) \qquad \int_0^1 \frac{z^a + z^{-a} - 2}{1-z} \frac{dz}{lz} = l\frac{a}{\sin a\pi} - l\frac{1}{\pi} = l\frac{a\pi}{\sin a\pi}.$$

Cette formule conduit à la détermination de quelques intégrales remarquables.

Si l'on fait, par exemple, $a = \frac{1}{2}$ et $z = x^2$, on a

$$\int_0^1 \frac{x + \frac{1}{x} - 2}{1-x^2} \frac{x}{lx}\, dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} \frac{dx}{lx} = l\frac{\pi}{2};$$

si l'on fait $a = \frac{1}{4}$, puis $z = y^4$, on a

$$\int_0^1 \frac{(1-y)\,y^2}{(1+y)\,(1+y^2)\,ly}\, dy = l\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

La formule (21) est due à Gauss (*Werke*, t. III, p. 160) qui en a déduit en particulier l'expression

$$l\frac{\alpha}{\beta} = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} - u^{\beta-1}}{lu}\, du,$$

formule qu'Euler avait trouvée d'une façon bien différente. (*Act. Petr.*, 1777, p. 29. — *Calc. Int.*, t. IV, p. 272.)

La formule particulière (23) a été employée par

Stern, *J. de Cr.*, t. XXI, p. 377.

Schlömilch, *Gr. Arch.*, t. IV, p. 167.

— *Beiträge*, III, p. 9.

Mais une des formules les plus importantes qui se déduisent de (21) est la suivante :

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^{1-a}}{1-x} \frac{dx}{x} = \pi \cot a\pi.$$

Euler, *Calc. Int.*, t. IV, p. 122....

Legendre, *Exerc.*, t. II, p. 48.

M. Hermite (*Atti di Torino*, t. XIV, p. 91) a montré l'importance de cette intégrale dans la théorie de la fonction gamma.

Voir aussi Bourguet (*Ann. Ec. Norm.*; Thèse, p. 8).

§ **9.** On peut démontrer, sans avoir recours à l'expression de $\psi(a)$ sous forme d'intégrale définie, que cette fonction se calcule sous forme finie toutes les fois que a est un nombre rationnel.

Considérons la fonction $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$, p et q étant deux nombres entiers et p étant plus petit que q.

$\psi(a)$ est la limite de l'expression

$$l\mu - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \ldots - \frac{1}{a+\mu}$$

lorsque μ croît indéfiniment; on peut donc écrire

$$\psi(a) = -\frac{1}{a} + l2 - \frac{1}{a+1} + l\frac{3}{2} - \frac{1}{a+2} + l\frac{4}{3} - \ldots \\ \ldots - \frac{1}{a+\mu} + l\frac{\mu+2}{\mu+1} - \ldots,$$

la série se prolongeant indéfiniment, puisque μ doit croître sans limite.

Si l'on remplace a successivement par $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{q-1}{q}\ldots, \frac{q}{q}$, on aura

$$(1)\quad \begin{cases} \psi\left(\frac{1}{q}\right) = -q + l2 - \frac{q}{q+1} + l\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+1} + l\frac{4}{3} - \ldots, \\ \psi\left(\frac{2}{q}\right) = -\frac{q}{2} + l2 - \frac{q}{q+2} + l\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+2} + l\frac{4}{3} - \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi\left(\frac{q-1}{q}\right) = -\frac{q}{q-1} + l2 - \frac{q}{q+q-1} \\ \qquad\qquad + l\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+q-1} + l\frac{4}{3} - \ldots, \\ \psi(1) = -1 + l2 - \frac{1}{2} + l\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + l\frac{4}{3} - \ldots. \end{cases}$$

Posons $\frac{2\pi}{q} = \omega$, et désignons par φ l'un quelconque des angles ω, $2\omega\ldots$, $(q-1)\omega$, $q\omega$, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} 1 = \cos q\varphi = \cos 2q\varphi = \ldots, \\ \cos\varphi = \cos(q+1)\varphi = \cos(q+2)\varphi = \ldots, \\ \cos 2\varphi = \cos(q+2)\varphi = \cos(2q+2)\varphi = \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos(q-1)\varphi + 1 = 0. \end{cases}$$

De plus on déduit aisément de la dernière de ces équations la formule

$$(3)\quad \begin{cases} 1 + \cos p\omega \cos k\omega + \cos 2p\omega \cos 2k\omega + \dots \\ \qquad\qquad \dots + \cos(q-1)p\omega \cos(q-1)k\omega = 0, \end{cases}$$

k désignant un des nombres 1, 2, 3..., $q-1$, à l'exception de p et de $q-p$, pour lesquels la somme est $\frac{1}{2}q$.

Les équations (1) peuvent s'écrire, en tenant compte des relations (2),

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\varphi\,\psi\left(\frac{1}{q}\right) = -q\cos\varphi + \cos\varphi\, l2 \\ \qquad\qquad -\frac{q}{q+1}\cos(q+1)\varphi + \cos\varphi\, l\frac{3}{2} - \dots, \\ \cos 2\varphi\,\psi\left(\frac{2}{q}\right) = -\frac{q}{2}\cos 2\varphi + \cos 2\varphi\, l2 \\ \qquad\qquad -\frac{q}{q+2}\cos(q+2)\varphi + \cos 2\varphi\, l\frac{3}{2} - \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \cos(q-1)\varphi\,\psi\left(\frac{q-1}{q}\right) = -\frac{q}{q-1}\cos(q-1)\varphi + \cos(q-1)\varphi\, l2 \\ \qquad\qquad -\frac{q}{2q-1}\cos(2q-1)\varphi + \cos(q-1)\varphi\, l\frac{3}{2} - \dots, \\ \psi(1) = -\frac{q}{q}\cos q\varphi + l2 - \frac{q}{2q}\cos 2q\varphi + l\frac{3}{2} - \dots, \end{cases}$$

et en ajoutant toutes ces équations membre à membre, on a

$$\cos\varphi\,\psi\left(\frac{1}{q}\right) + \cos 2\varphi\,\psi\left(\frac{2}{q}\right) + \dots + \cos(q-1)\varphi\,\psi\left(\frac{q-1}{q}\right) + \psi(1) = -q\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \dots + \frac{1}{n}\cos n\varphi + \dots\right),$$

la série qui paraît entre parenthèses dans le second membre étant prolongée indéfiniment. Dans la somme, en effet, chacun des logarithmes a pour facteur la somme

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos(q-1)\varphi + 1$$

qui est nulle; de plus, le terme $-\frac{q}{kq+i}\cos(kq+i)\varphi = -\frac{q}{kq+i}\cos i\varphi$ se présente une fois et une seule, il provient du $(2k+1)^{\text{ième}}$ terme de la $i^{\text{ième}}$ ligne.

Le développement en série du second membre se trouve facilement sous forme finie; si dans la formule

$$l(1-z) = -\left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\right)$$

on pose

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

et que l'on égale les parties réelles des deux membres, on trouve

$$\frac{1}{2}l(1-2\rho\cos\varphi+\rho^2) = -\left(\rho\cos\varphi + \frac{\rho^2}{2}\cos 2\varphi + \dots\right).$$

En faisant $\rho = 1$ et substituant dans la formule établie précédemment, on a donc

$$(5)\quad \begin{cases} \cos\varphi\,\psi\left(\frac{1}{q}\right) + \cos 2\varphi\,\psi\left(\frac{2}{q}\right) + \dots + \cos(q-1)\varphi\,\psi\left(\frac{q-1}{q}\right) \\ \qquad\qquad = -\psi(1) + \frac{1}{2}l(2-2\cos\varphi). \end{cases}$$

On obtiendra $q-1$ équations du premier degré entre les quantités $\psi\left(\frac{1}{q}\right), \psi\left(\frac{2}{q}\right), \dots, \psi\left(\frac{q-1}{q}\right)$ en donnant à φ les valeurs successives $\varphi = \omega$, $\varphi = 2\omega$, ..., $\varphi = (q-1)\omega$. Ces équations se résolvent facilement.

Il suffit, en effet, de multiplier les deux membres de chacune de ces équations respectivement par $\cos p\omega$, $\cos 2p\omega$, ..., $\cos(q-1)p\omega$ et de les ajouter membre à membre en leur adjoignant l'équation obtenue en faisant, dans la relation de Gauss entre les fonctions ψ, $a = \frac{1}{q}$, $n = q$ ce qui donne

$$(6)\quad \psi\left(\frac{1}{q}\right) + \psi\left(\frac{2}{q}\right) + \dots + \psi\left(\frac{q-1}{q}\right) = -\psi(1) + q\psi(1) - q\,lq;$$

on trouve, après avoir divisé par $\frac{q}{2}$,

$$(7)\quad \begin{cases} \psi\left(\frac{q-p}{q}\right)+\psi\left(\frac{p}{q}\right)=2\psi(1)-2lq+\cos p\omega\, l(2-2\cos\omega) \\ \qquad\qquad +\cos 2p\omega\, l(2-2\cos 2\omega)+\dots \\ \qquad\qquad +\cos(q-1)p\omega\, l[2-2\cos(q-1)\omega]. \end{cases}$$

On voit que le dernier terme de cette équation est égal à $\cos p\omega\, l(2-2\cos\omega)$, l'avant-dernier à $\cos 2p\omega\, l(2-2\cos 2\omega)$, etc., en sorte que les termes sont égaux deux à deux, excepté dans le cas où q est pair; il y a alors un terme du milieu

$$\cos\frac{q}{2}p\omega\, l\left(2-2\cos\frac{q}{2}\omega\right)$$

égal à $2l2$ si p est pair, à $-2l2$ si p est impair.

D'autre part, la relation des compléments relative aux fonctions ψ

$$\psi(a)-\psi(1-a)=-\pi\cot a\pi$$

devient, si l'on y fait $a=\frac{p}{q}$,

$$(8)\qquad \psi\left(\frac{q-p}{q}\right)-\psi\left(\frac{p}{q}\right)=\pi\cot\frac{p\pi}{q}.$$

Les équations (7) et (8) fournissent maintenant $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\psi\left(\frac{p-q}{q}\right)$.

Pour une valeur impaire de q, en supposant p plus petit que q, on a

$$(9)\quad \begin{cases} \psi\left(\frac{p}{q}\right)=\psi(1)-\frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q}-lq+\cos\frac{2p\pi}{q}\,l\left(2-2\cos\frac{2\pi}{q}\right) \\ \qquad\qquad +\cos\frac{4p\pi}{q}\,l\left(2-2\cos\frac{4\pi}{q}\right)+\dots \\ \qquad\qquad +\cos\frac{(q-1)p\pi}{q}\,l\left(2-2\cos\frac{(q-1)\pi}{q}\right); \end{cases}$$

lorsque q est pair, on a

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}\psi\left(\frac{p}{q}\right) = \psi(1) - \frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q} - lq + \cos\frac{2p\pi}{q}\,l\left(2-2\cos\frac{2\pi}{q}\right)\\ + \cos\frac{4p\pi}{q}\,l\left(2-2\cos\frac{4\pi}{q}\right) + \ldots\\ + \cos\frac{(q-2)p\pi}{q}\,l\left(2-2\cos\frac{(q-2)\pi}{q}\right) \pm l2,\end{aligned}\right.$$

le signe + s'applique si p est pair, le signe — si p est impair.

On trouve de cette manière

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}\psi\left(\frac{3}{4}\right) &= \psi(1) + \frac{1}{2}\pi - 3l2,\\ \psi\left(\frac{1}{4}\right) &= \psi(1) - \frac{1}{2}\pi - 3l2,\\ \psi\left(\frac{2}{3}\right) &= \psi(1) + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}l3,\\ \psi\left(\frac{1}{3}\right) &= \psi(1) - \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}l3.\end{aligned}\right.$$

La formule (8) implique la condition $p<q$, remarquons cependant que la formule

$$\psi(a+n) = \psi(a) + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \ldots + \frac{1}{a+n-1}$$

permet d'étendre les résultats trouvés aux valeurs de l'argument supérieures à l'unité.

C'est à Gauss (*Werke*, t. III, p. 155) que l'on doit cette détermination élégante $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$.

§ **10.** Nous avons représenté précédemment $\psi(x) - \psi(1)$ par une intégrale définie; on peut exprimer $\psi(x)$ de la même manière sans introduire la transcendante $\psi(1)$.

Reprenons la formule

$$(1)\quad \psi(x) = \int_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz + \lim\left[\int_0^1 \left(\frac{z^{x+\mu-1}}{1-z} - \frac{\mu z^{\mu-1}}{1-z^{\mu}}\right)dz\right]_{\mu=\infty};$$

dans la première intégrale, remplaçons z par z^{μ}, elle devient :

$$\mu\int_0^1 \frac{z^{\mu-1} - z^{\mu x-1}}{1-z^{\mu}}\,dz;$$

et l'on peut alors écrire

$$\psi(x) = \lim\left[\int_0^1 \left(\frac{z^{x+\mu-1}}{1-z} - \frac{\mu z^{\mu x-1}}{1-z^{\mu}}\right)dz\right]_{\mu=\infty}.$$

Posons maintenant $z^{\mu} = u$, et il viendra

$$\psi(x) = \lim\left[\int_0^1 \left(\frac{u^{\frac{x}{\mu}+1-\frac{1}{\mu}}}{1-u^{\frac{1}{\mu}}} - \frac{\mu u^{x-\frac{1}{\mu}}}{1-u}\right)\frac{1}{\mu}u^{\frac{1}{\mu}-1}\,du\right],$$

ou bien

$$\psi(x) = \lim\left[\int_0^1 \left(\frac{u^{\frac{x}{\mu}}}{\mu\left(1-u^{\frac{1}{\mu}}\right)} - \frac{u^{x-1}}{1-u}\right)du\right].$$

Or, lorsque μ augmente indéfiniment, l'expression $\mu\left(1-u^{\frac{1}{\mu}}\right)$ a pour limite $-lu$ et $u^{\frac{x}{\mu}}$ a pour limite l'unité; on a donc enfin

$$(2)\qquad \psi(x) = -\int_0^1 \left(\frac{1}{lu} + \frac{u^{x-1}}{1-u}\right)du.$$

Cette expression de $\psi(x)$ et la méthode qui y conduit sont dues à Gauss (*Werke*, t. III, p. 158).

On emploie souvent une autre expression de la fonction $\psi(a)$ obtenue en partant de la représentation de $\Gamma(a)$ par une intégrale définie.

On a

$$(3)\qquad \Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\,dx.$$

et par suite

$$\frac{d\Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} lx\, dx. \tag{4}$$

Or, si l'on pose

$$u = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-zx}}{z}\, dz, \tag{5}$$

on a

$$\frac{du}{dx} = \int_0^\infty e^{-zx} dz = \frac{1}{x},$$

$$u = lcx,$$

et, en faisant $x = 1$ dans la formule (5), on voit que $c = 1$, et on a

$$lx = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-zx}}{z}\, dz; \tag{6}$$

en sorte que la formule (4) peut s'écrire

$$\frac{d\Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-zx}}{z}\, dz,$$

ou bien, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\frac{d\Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[e^{-z}\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx - \int_0^\infty e^{-(1+z)x} x^{a-1} dx\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\Gamma(a)}{da} = \Gamma(a)\int_0^\infty \left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^a}\right)\frac{dz}{z},$$

et l'on peut écrire

$$\frac{dl\Gamma(a)}{da} = \psi(a) = \int_0^\infty \left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^a}\right)\frac{dz}{z}. \tag{7}$$

Si l'on intègre les deux membres de cette équation entre les limites 1 et a, en remarquant que $l\Gamma(1) = 0$, on en déduit :

$$l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-a}}{l(1+z)}\right]\frac{dz}{z}.$$

Or cette formule peut se simplifier. Remarquons en effet que l'on a

$$\Gamma(2) = 1, \qquad l\Gamma(2) = 0,$$

et par suite

$$0 = \int_0^\infty \left(e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-2}}{l(1+z)} \right) \frac{dz}{z},$$

$$0 = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{(1+z)^{-2}}{l(1+z)} \right) dz.$$

Multiplions les deux membres de cette identité par $(a-1)$ et retranchons membre à membre de l'expression trouvée pour $l\Gamma(a)$, il vient

$$l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)(1+z)^{-2} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-a}}{z} \right] \frac{dz}{l(1+z)}.$$

Si l'on pose

$$l(1+z) = v,$$

on a

$$(8) \qquad l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)e^{-v} - \frac{e^{-v} - e^{-va}}{1-e^{-v}} \right] \frac{dv}{v}.$$

On en déduit une nouvelle expression de $\psi(a)$ en différentiant par rapport à a :

$$(9) \qquad \frac{dl\Gamma(a)}{da} = \psi(a) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-v}}{v} - \frac{e^{-va}}{1-e^{-v}} \right) dv.$$

Si dans l'équation (8) on pose $e^{-v} = z$, on obtient

$$(10) \qquad l\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\frac{1-z^{a-1}}{1-z} - a + 1 \right) \frac{dz}{lz}.$$

L'expression de $\psi(a)$ sous forme d'intégrale définie donnée par la formule (7) est due à Lejeune-Dirichlet (*J. de Cr.*, t. XV, p. 260). Voir aussi

Grunert, *Gr. Arch.*, t. II, p. 266.

Schlömilch, *Studien*, t. I, p. 4.

Lejeune-Dirichlet donne aussi la formule

$$\psi(a) = \int_0^1 (e^{1-\frac{1}{x}} - x^a) \frac{dx}{x(1-x)}.$$

La formule (8) est de Malmsten (*J. de Cr.*, t. XXXV, p. 55). Gauss avait tiré la formule (9) de la formule (2) (*Werke*, t. III, p. 160). Pour la démonstration que nous avons donnée, voir Schlömilch (*Studien*, t. I, p. 10) et Schaar (*Mém. cour. de Brux.*, t. XXII).

A toute expression de $\psi(a)$ par une intégrale définie correspond une expression semblable de $\psi(1)$ et par suite de la constante d'Euler.

L'équation

$$(11) \qquad l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax} - e^{-x}}{1-e^{-x}} + (a-1)e^{-x} \right) \frac{dx}{x}$$

donne

$$l\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-(1-a)x} - e^{-x}}{1-e^{-x}} - ae^{-x} \right) \frac{dx}{x},$$

que l'on peut écrire, en tenant compte de la relation des compléments,

$$(12) \quad l\Gamma(a) - l\pi + l\sin a\pi = -\int_0^\infty \left(\frac{e^{-(1-a)x} - e^{-x}}{1-e^{-x}} - ae^{-x} \right) \frac{dx}{x}.$$

En ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), il vient

$$2l\Gamma(a) - l\pi + l\sin a\pi = \int_0^\infty \left[\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-a\right)x} - e^{-\left(\frac{1}{2}-a\right)x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - (1-2a)e^{-x} \right] \frac{dx}{x},$$

et le second membre se prête à un développement remarquable.

Pour α quelconque et ω compris entre $-\pi$ et $+\pi$, on a

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{e^{\alpha\omega} - e^{-\alpha\omega}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} = \frac{1\sin\omega}{\alpha^2+1^2} - \frac{2\sin 2\omega}{\alpha^2+2^2} + \frac{3\sin 3\omega}{\alpha^2+3^2} - \cdots, \\ \frac{\omega}{2} = \frac{\sin\omega}{1} - \frac{\sin 2\omega}{2} + \frac{\sin 3\omega}{3} - \cdots. \end{cases}$$

En posant $\alpha = \frac{x}{2\pi}$ et $\omega = (1-2a)\pi$, on obtient

$$\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-a\right)x} - e^{-\left(\frac{1}{2}-a\right)x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 4\left(\frac{2\pi\sin 2a\pi}{x^2+(2\pi)^2} + \frac{4\pi\sin 4a\pi}{x^2+(4\pi)^2} + \frac{6\pi\sin 6a\pi}{x^2+(6\pi)^2} + \ldots\right)$$

$$1-2a = 4\left(\frac{\sin 2a\pi}{2\pi} + \frac{\sin 4a\pi}{4\pi} + \frac{\sin 6a\pi}{6\pi} + \ldots\right),$$

formules valables pour x quelconque et a compris entre zéro et un.

On trouve alors par substitution

$$2l\Gamma(a) - l\pi + l\sin a\pi = 4(b_2\sin 2a\pi + b_4\sin 4a\pi + b_6\sin 6a\pi + \ldots),$$

en posant

$$b_{2n} = \int_0^x \left(\frac{2n\pi}{x^2+(2n\pi)^2} - \frac{e^{-x}}{2n\pi}\right)\frac{dx}{x}.$$

Or, on peut écrire

$$b_{2n} = \frac{1}{2n\pi}\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - \frac{x}{4n^2\pi^2+x^2}\right)\frac{dx}{x} + \int_0^x \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x}\right].$$

La première intégrale placée entre parenthèses est, comme on le vérifie facilement, égale à $l(2n\pi)$; quant à la seconde, elle est égale à $-\psi(1)$ ou γ.

On a donc

$$b_{2n} = \frac{1}{2n\pi}[l(2n\pi) + \gamma],$$

et il vient

$$l\Gamma(a) - \frac{1}{2}l\pi + \frac{1}{2}l\sin a\pi = \frac{l(2\pi)+\gamma}{\pi}\sin 2a\pi + \frac{l(4\pi)+\gamma}{2\pi}\sin 4a\pi + \ldots,$$

ou bien, en remarquant que l'on a, d'après la formule (13),

$$\frac{l\pi+\gamma}{\pi}\sin 2a\pi + \frac{l\pi+\gamma}{2\pi}\sin 4a\pi + \ldots = \left(\frac{1}{2}-a\right)(l\pi+\gamma).$$

on a la formule

$$(14)\quad l\Gamma(a) = (1-a)l\pi + \gamma\left(\frac{1}{2}-a\right) - \frac{1}{2}l\sin a\pi + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{l2n}{n}\sin 2na\pi.$$

Ce développement de $l\,\Gamma(a)$ a été donné par Kummer (*J. de Cr.*, t. XXXV, p. 1), par une méthode bien différente de la précédente. Le procédé que nous avons employé pour y parvenir est dû à Schlömilch (*Compendium*, t. II, p. 255). Gilbert en a donné une autre démonstration (*Mém. Ac. Belg.*, t, XLI, p. 16). Cette série a conservé le nom de *série de Kummer*.

§ **11.** Nous avons déjà trouvé précédemment plusieurs développements en série de la fonction $l\,\Gamma(a)$. Les expressions sous forme d'intégrale définie que nous avons obtenues nous conduisent à des développements nouveaux, mais il nous sera utile tout d'abord de nous occuper de l'évaluation approchée de la fonction gamma quand l'argument est un grand nombre.

Nous partirons à cet effet de la formule de Wallis

$$(1)\qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2a}{2a-1}\frac{2a}{2a+1}\cdots,$$

où a est un nombre entier.

On peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \lim\frac{(2.4.6\ldots 2a)^2}{(1.3.5\ldots 2a-1)^2\,(2a+1)}\\ &= \lim 2^{2a}\frac{(1.2.3\ldots a)^2\,[2.4\ldots(2a-2)2a]^2}{(1.2.3\ldots 2a)^2\,(2a+1)}\\ &= \lim 2^{4a}\frac{(a!)^4}{(2a!)^2\,(2a+1)}.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(2)\qquad \varphi(a) = \frac{a!}{\sqrt{2\pi}\,e^{-a}a^{a+\frac{1}{2}}},$$

on voit alors facilement que la formule (1) équivaut à la suivante :

$$\lim \frac{[\varphi(a)]^2}{\varphi(2a)} = 1. \tag{3}$$

D'autre part on peut voir directement que l'on a aussi

$$\lim \frac{\varphi(a)}{\varphi(2a)} = 1. \tag{4}$$

La formule (2) donne

$$\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} = e^{-1}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+\frac{1}{2}} = e^{-1+\left(a+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{a}\right)},$$

ou bien, en prenant les logarithmes,

$$l\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} = -1 + \left(a+\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{a}\right);$$

a étant supposé plus grand que 1, on aura

$$l\left(1+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{na^n} - \ldots,$$

d'où

$$\left(a+\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{a}\right) = 1 + \frac{1}{12a^2} - \frac{1}{12a^3} + \ldots, + \frac{n-1}{2n(n+1)}\frac{(-1)^n}{a^n} + \ldots,$$

donc

$$l\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} = \frac{1}{12a^2} - \frac{1}{12a^3} + \ldots + \frac{n-1}{2n(n+1)}\frac{(-1)^n}{a^n} + \ldots. \tag{5}$$

Dans cette série les termes sont alternativement positifs et négatifs; la valeur absolue du rapport du terme de rang n au précédent est

$$\frac{n^2}{n^2+n-2}\frac{1}{a},$$

et par suite est égal à $\frac{1}{a}$ pour $n=2$ et inférieur à $\frac{1}{a}$ pour toute valeur de n supérieure à 2; donc, lors même que a se réduirait

à 1, les valeurs absolues des termes de la série (11) vont en décroissant à partir du deuxième. On a donc évidemment

$$l\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} < \frac{1}{12a^2}$$

ou bien

$$\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} < e^{\frac{1}{12a^2}}. \tag{6}$$

On peut écrire

$$\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} = e^{\frac{\theta_0}{a^2}}, \tag{7}$$

θ_0 étant un nombre positif et inférieur à $\frac{1}{12}$. On obtient en changeant a en $a+1$, $a+2$,... $2a-1$ et en désignant par θ_1, θ_2,... θ_{a-1} des quantités positives comprises entre 0 et 1,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\varphi(a+1)}{\varphi(a+2)} = e^{\frac{\theta_1}{(a+1)^2}}, \\ \dfrac{\varphi(a+2)}{\varphi(a+3)} = e^{\frac{\theta_2}{(a+2)^2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\varphi(2a-1)}{\varphi(2a)} = e^{\frac{\theta_{a-1}}{(2a-1)^2}}. \end{array}\right. \tag{8}$$

Multiplions membre à membre les égalités (7) et (8), la somme des fractions

$$\frac{\theta_0}{a^2} + \frac{\theta_1}{(a+1)^2} + \frac{\theta_2}{(a+2)^2} + \ldots + \frac{\theta_{a-1}}{(2a-1)^2}$$

est moindre que $\frac{1}{12a^2}\,a$ ou que $\frac{1}{12a}$, on aura donc

$$\frac{\varphi(a)}{\varphi(2a)} = e^{\frac{\theta}{a}},$$

en désignant par θ un nombre compris entre 0 et $\frac{1}{12}$, et par suite

$$\lim\left[\frac{\varphi(a)}{\varphi(2a)}\right]_{a=\infty} = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Comparons maintenant les formles (3) et (4), il vient

$$\lim \varphi(a)_{a=x} = 1, \tag{9}$$

ou bien, par la définition de $\varphi(a)$,

$$a! = \Gamma(a+1) = \sqrt{2\pi} e^{-a} a^{a+\frac{1}{2}} (1+\varepsilon), \tag{10}$$

ε étant une quantité positive qui s'annule pour $a = \infty$.

On voit donc que, a étant un nombre entier, on a pour de grandes valeurs de a la valeur approchée

$$\Gamma(a) = \sqrt{2\pi} e^{-a} a^{a-\frac{1}{2}}.$$

Les considérations qui précèdent peuvent nous fournir un développement de $l\Gamma(a+1)$ lorsque a est entier. On a d'abord

$$l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2} l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right) la + l_\varphi(a). \tag{11}$$

Or, en employant une méthode dont nous avons déjà rencontré bien des applications, on a identiquement

$$l_\varphi(a) = l\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} + l\frac{\varphi(a+1)}{\varphi(a+2)} + \ldots + l\frac{\varphi(a+n)}{\varphi(a+n+1)} + l_\varphi(a+n+1).$$

Si l'entier n augmente indéfiniment, $\varphi(a+n+1)$ a pour limite l'unité et son logarithme a pour limite zéro. On a donc

$$l_\varphi(a) = \sum_0^\infty l\frac{\varphi(a+n)}{\varphi(a+n+1)}, \tag{12}$$

ou bien, d'après la formule

$$l_\varphi(a) = \sum_0^\infty \left[\left(a+n+\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{a+n}\right) - 1\right],$$

et l'on a par suite

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} l\Gamma(a+1) &= \frac{1}{2}\,l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)la \\ &\quad + \sum_{0}^{\infty}\left[\left(a+n+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{a+n}\right)-1\right]. \end{aligned}\right.$$

Cette formule se trouve établie seulement pour les valeurs entières de a; mais le second membre a encore une signification quelle que soit la valeur attribuée à a, si l'on excepte toutefois le cas où a est nul ou égal à un entier négatif. En effet, la série qui figure dans cette formule est toujours convergente, car ses termes, comme il est aisé de s'en assurer en développant $l\left(1+\frac{1}{a+n}\right)$ décroissent comme ceux de la série convergente $\Sigma\,\frac{1}{n^2}$.

Pour démontrer que la formule (13) subsiste quel que soit a, il suffit de voir que cette formule coïncide avec celle qui nous a servi lorsqu'il s'est agi d'établir que la définition de Gauss par un produit infini s'appliquait à toute valeur de l'argument. Nous avons vu alors que l'on avait

$$(14)\quad l\Gamma(a+1) = \sum_{0}^{\infty}\left[a\,l\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - l\left(1+\frac{a}{n+1}\right)\right].$$

Or si l'on prend les dérivées secondes par rapport à a des membres de chacune des équations (13) et (14), on obtient dans les deux cas

$$(15)\quad \frac{d^2 l\Gamma(a+1)}{da^2} = \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(a+n+1)^2}.$$

Les dérivées secondes des seconds membres des deux formules étant égales, ces seconds membres ne peuvent différer que par une fonction linéaire de a. Comme ils sont égaux pour toute valeur entière et positive de a, leur différence se réduit nécessairement à zéro.

La formule (11) est donc vraie, quelle que soit la valeur de

l'argument a, $l\varphi(a)$ a encore alors d'après la formule (9) pour limite zéro lorsque a augmente indéfiniment; on a donc toujours pour valeur approchée de $\Gamma(a+1)$, que a soit entier ou non, pourvu qu'il soit très grand et positif,

$$\Gamma(a+1) = \sqrt{2\pi}\, e^{-a}\, a^{a+\frac{1}{2}}.$$

Stirling s'est occupé le premier de la détermination de $l\,(1.2.3...a)$ pour a très grand, ou plus généralement de la détermination de $l[a(a+r)...(a+nr)]$, n étant supposé considérable.

Après lui, Euler et Legendre (*Exerc.*, t. I, p. 340 et t. I, p. 350) ont donné des démonstrations de la formule (10), mais les procédés qu'ils ont employés ne présentaient pas la rigueur que l'on était en droit d'exiger. Aussi les géomètres sont-ils revenus après eux en maintes occasions sur cette question.

Cauchy, *Exerc. d'An. et de Ph.* t. II.

Liouville, *C. R.*, t. IX, p. 105. — *Liou. J.*, t. IV, p. 317.

Binet, *J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, 3e p.

— *C. R.*, t. IX, p. 156.

Raabe, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 147; t. XXVIII, p. 10.

Malmsten, *J. de Cr.*, t. XXXV.

Mais la démonstration si simple que nous avons donnée est due à Serret (*Cal. D. et I.*, t. II). Déjà avant lui Legendre avait signalé l'importance de la formule dans l'évaluation approchée de la fonction Γ (*Exerc.*, t. I, p. 350).

La valeur approchée de $\Gamma(a)$ conduit à une démonstration élégante, donnée par Cauchy, de la relation de Gauss. Ecrivons cette relation sous la forme

$$n^{na}\,\frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(na)} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

montre que le premier membre ne varie pas quand on fait croître a d'une unité; il ne variera donc pas non plus si l'on ajoute à a autant d'unités qu'on voudra et si par ce moyen on fait croître a au delà de toute limite; on pourra alors remplacer dans le premier membre chaque fonction gamma par sa valeur approchée. Le premier membre devient ainsi, après des réductions évidentes,

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{n-1}{2}} \left(1+\frac{1}{na}\right)^{a+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{2}{na}\right)^{a+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}} \dots \left(1+\frac{n-1}{na}\right)^{a+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on fait

$$\mathrm{P} = \left(1+\frac{1}{na}\right)^{a+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{2}{na}\right)^{a+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}} \dots \left(1+\frac{n-1}{na}\right)^{a+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}},$$

$$l\mathrm{P} = \left(a+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{na}\right) + \dots + \left(a+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{n-1}{na}\right),$$

et si l'on développe en série les logarithmes qui entrent dans le second membre, il vient, en ne prenant que les termes qui ne s'annulent pas pour a infiniment grand,

$$l\mathrm{P} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{2},$$

$$\mathrm{P} = e^{\frac{n-1}{2}}.$$

Substituant cette valeur de P, la formule (1) est démontrée.

La relation de Gauss permet, lorsqu'on y fait croître n indéfiniment, de calculer l'intégrale

$$\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da.$$

On a, en effet, en posant $n\,da = 1$,

$$\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da = \lim da \left\{ l\Gamma(a) + l\Gamma(a+da) + \dots + l\Gamma[a+(n-1)da] \right\},$$

c'est-à-dire

$$\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da = \lim da\, l\{\Gamma(a)\Gamma(a+da) + \ldots + \Gamma[a+(n-1)da]\};$$

or, puisque $da = \frac{1}{n}$, la relation de Gauss donne

$$\Gamma(a)\Gamma(a+da) \ldots \Gamma[a+(n-1)da] = \Gamma(na)n^{-na}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}};$$

par conséquent

$$\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da = \lim da\left[l\Gamma(na) - na\,ln + \frac{n-1}{2}l2\pi + \frac{1}{2}ln\right].$$

Mais on a, à cause de $n\,da = 1$,

$$\lim da\,\frac{n-1}{2}\,l2\pi = \frac{1}{2}\,l2\pi,$$

$$\lim \frac{1}{2}\,da\,ln = 0.$$

D'ailleurs, n étant infiniment grand,

$$\Gamma(na) = \sqrt{2\pi}\,e^{-na}(na)^{na-\frac{1}{2}},$$

$$l\Gamma(na) = l\sqrt{2\pi} - na + \left(na - \frac{1}{2}\right)lna,$$

$$l\Gamma(na) - na\,ln = l\sqrt{2\pi} - na + na\,la - \frac{1}{2}la - \frac{1}{2}ln,$$

$$\lim da\,[l\Gamma(na) - na\,ln] = -a + a\,la,$$

et par conséquent enfin

$$\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da = \frac{1}{2}\,l2\pi + a\,la - a.$$

L'intégrale à laquelle nous venons de parvenir a été donnée par Raabe.

La même formule a été depuis démontrée bien des fois.

Malmsten, *J. de Cr.*, t. XXXV, p. 75.

Björling, *Overs. Stock. Förh.*, 1856, p. 181.

Bierens de Haan (*Arch. Néerl.*, VIII, p. 135. — *Verslagen en Med.*, VII$_2$, p. 12) a obtenu la même formule en partant de l'expression

$$\frac{1}{q^p}\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-qx}x^{p-1}\,dx;$$

il arrive en même temps à la formule

$$\int_0^1 l\Gamma(ax)\,dx=\frac{1}{2}l2\pi-\frac{a-1}{2}+\frac{1}{a}\sum_{n=2}^{n=l-1}n\,ln.$$

Liebrecht (*Grun. Arch.*, t. LIX, p. 218) l'obtient en déterminant

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n}l\Gamma(na)-a\,ln\right].$$

Lorsque n est considérable, on a, d'après ce qui précède,

$$\Gamma(a+n)=\sqrt{2\pi}\,e^{-a-n}(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}.$$

Mais on a identiquement

$$(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}=n^{a+n-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^{a-\frac{1}{2}},$$

et lorsque n augmente indéfiniment, le second facteur a une limite égale à e^a et le troisième a une limite égale à l'unité. On peut donc écrire

$$\Gamma(a+n)=\sqrt{2\pi}\,e^{-n}n^{n-\frac{1}{2}}n^a,$$

ou bien

$$\lim\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)n^a}=1.$$

Or, en ce qui concerne les fonctions $P(a)$ et $Q(a)$ (§ 5), on a immédiatement

$$\lim\frac{P(a+n)}{\Gamma(n)n^a}=0,$$

et l'équation

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)n^a} = \frac{P(a+n)}{\Gamma(n)n^a} + \frac{Q(a+n)}{\Gamma(n)n^a}$$

donne

$$\lim \frac{Q(a+n)}{\Gamma(n)n^a} = 1.$$

Il est facile, avec ce qui précède, et en tenant compte des relations auxquelles satisfont les fonctions P et Q, de former une fonction S définie par les deux équations

$$S(a+1) = aS(a) + l,$$

$$\lim \frac{S(a+n)}{\Gamma(n)n^a} = k.$$

La première relation donne

$$S(a) = \frac{1}{a} S(a+1) - \frac{l}{a},$$

$$S(a+1) = \frac{1}{a+1} S(a+2) - \frac{l}{a+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S(a+n) = \frac{1}{a+n} S(a+n+1) - \frac{l}{a+n}.$$

Multiplions ces égalités respectivement par

$$1, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a(a+1)}, \quad \cdots \quad \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n-1)};$$

il vient, en ajoutant membre à membre,

$$S(a) = \frac{S(a+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n)} - l\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \ldots + \frac{1}{a(a+1)(a+n)}\right]$$

$$= n^a \frac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n)} \frac{S(a+n+1)}{n^a \Gamma(n+1)} - l\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \ldots\right].$$

En tenant compte de la seconde relation et de la définition de Gauss,

$$S(a) = k\Gamma(a) - le P(a) = (k - le)P(a) + kQ(a).$$

C'est Weierstrass qui a donné (*J. de Cr.*, t. LI) la condition que nous venons d'établir, condition qui suffit avec la relation fonctionnelle à déterminer la fonction Γ. La fonction Γ se présente comme la plus simple des fonctions S.

Voir Prym (*J. de Cr.*, t. LXXII) et Bourguet (*Ann. de l'Ec. Norm.*, thèse, p. 46).

§ 12. L'expression approchée de $\Gamma(a)$ pour des valeurs très grandes de l'argument conduit à considérer la fonction gamma comme le produit de deux fonctions dont l'une est précisément cette valeur approchée, l'autre ayant pour limite l'unité lorsque a augmente indéfiniment. L'intégrale définie par laquelle nous avons représenté $l\Gamma(a)$ conduit simplement à cette décomposition.

On a

$$(1) \qquad l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)\,e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{1-e^{-x}} \right] \frac{dx}{x},$$

que l'on peut écrire

$$l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left(a - 1 - \frac{1}{1-e^{-x}} \right) \frac{e^{-x}}{x}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{x(1-e^{-x})}\,e^{ax}\,dx,$$

ou bien encore, en remarquant que, si l'on développe $\frac{1}{x(1-e^{-x})}$ suivant les puissances croissantes de x, les termes qui renferment des exposants négatifs sont

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x},$$

$$(2) \qquad l\Gamma(a) = \mathrm{F}(a) + \varpi(a),$$

où

$$(3) \quad \begin{cases} \mathrm{F}(a) = \displaystyle\int_0^\infty \left[\left(a - 1 - \frac{1}{1-e^{-x}} \right) e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) e^{-ax} \right] \frac{dx}{x}, \\ \varpi(a) = \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-ax}\,\frac{dx}{x}. \end{cases}$$

On peut calculer aisément $F(a)$ sous forme finie. Nous nous appuierons sur l'évaluation des intégrales suivantes : on a

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

On en déduit, en multipliant les deux membres par $d\alpha$ et les intégrant ensuite entre les limites α et β,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx = l\beta - l\alpha. \tag{4}$$

Si l'on multiplie de nouveau les deux membres de (4) par $d\alpha$ et que l'on intègre entre les limites α et γ, on trouve

$$\int_0^\infty \left[\frac{e^{-\alpha x}}{x^2} - \frac{e^{-\gamma x}}{x^2} - \frac{e^{-\beta x}(\gamma - \alpha)}{x}\right] dx = (\gamma - \alpha)l\beta - \gamma l\gamma + \alpha l\alpha + \gamma - \alpha. \tag{5}$$

Calculons maintenant $\varpi\left(\frac{1}{2}\right)$; on a

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}\,\frac{dx}{x}$$

ou bien, en remplaçant x par $2x$,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right) e^{-x}\,\frac{dx}{x}. \tag{6}$$

D'autre part, on a identiquement

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\left(1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}};$$

mais on a,

$$\varpi(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-x}\,\frac{dx}{x},$$

et en remplaçant x par $2x$

$$\varpi(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right) e^{-2x}\,\frac{dx}{x},$$

et on en conclut, en retranchant membre à membre ces deux équations,

$$(7) \qquad 0 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}} - \frac{2-e^{-x}}{2x} - \frac{1-e^{-x}}{2} \right) e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

En retranchant membre à membre les équations (6) et (7), on obtient donc

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x} \right) dx;$$

la formule (5), où l'on fait $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, donne alors

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{l2}{2},$$

et comme on connaît $l\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, qui est égal à $\frac{1}{2} l\pi$, on a donc, (2),

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} l2\pi - \frac{1}{2}.$$

$\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right)$ étant connu, les formules (4) et (5) permettent d'obtenir $\mathrm{F}(a)$, en calculant la différence $\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right)$; on a :

$$\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left[\left(a - \frac{1}{2}\right) e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\left(e^{-ax} - e^{-\frac{1}{2}x}\right) \right] \frac{dx}{x},$$

ce que l'on peut écrire comme il suit :

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax} - e^{-\frac{x}{2}}}{x^2} + \frac{(a-\frac{1}{2})e^{-x}}{x} \right) dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-\frac{1}{2}x}}{x}\, dx;$$

la formule (5), où l'on fait $\alpha = a$, $\beta = 1$ et $\gamma = \frac{1}{2}$, fournit la valeur de la première intégrale; la formule (4), où l'on fait $\alpha = a$, $\beta = \frac{1}{2}$, donne la seconde, et il vient

$$\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right) = -a + \frac{1}{2} + \left(a - \frac{1}{2}\right) la;$$

par conséquent

$$F(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) la - a + \frac{1}{2} l2\pi.$$

On a donc

$$l\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) la - a + \frac{1}{2} l2\pi + \varpi(a)$$

et par suite

$$\Gamma(a) = e^{-a} a^{a-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}\, e^{\varpi(a)}.$$

Lorsque a est très grand, la valeur approchée connue de $\Gamma(a)$ montre que $e^{\varpi(a)}$ est voisin de l'unité, ou, si l'on veut, que $\varpi(a)$ a pour limite zéro.

Avec la notation employée dans le paragraphe précédent, on a

$$\varpi(a) = l_2(a-1).$$

Legendre (*Exerc.*, t. I, p. 289) avait établi, en partant de résultats dus à Euler (*Calcul diff.*, p. 465), la formule

$$\Gamma(a+1) = \left(\frac{a}{e}\right)^a (2\pi a)^{\frac{1}{2}} R.$$

Mais sa démonstration suppose a entier. La détermination du coefficient de R a, comme nous l'avons déjà dit, été l'objet des travaux de plusieurs géomètres :

Cauchy, *Exerc. d'A. et de Ph.*, t. II, p. 384.

Liouville, *J. de Liou.*, t. IV, p. 318.

Schaar, *Mém. Com. Ac. Belg.*, t. XXII, p. 6.

Stern, *Beiträge ...*, p. 134.

Genocchi, *Bull. Ac. Belg.*, t. XXI, p. 84.

Schlömilch, *Studien*, t. I, p. 53.

— , *Compendium*, t. II, p. 249.

La fonction $\varpi(a)$, dont le rôle est si important dans la théorie de la fonction gamma, a été introduite par Plana (*Mém. Ac. de Turin*, t. XXIV, p. 410), puis retrouvée par Binet qui la désignait

par $\mu(a)$. C'est Cauchy (*C. R.*, t. XVI, p. 422) qui s'est servi le premier du symbole ϖ adopté maintenant d'une façon générale; Catalan (*C. R.*, t. LXXXVIII) a employé pour désigner la même fonction le caractère ω.

§ 13. La formule

$$(1) \qquad l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2} l2\pi - a + \left(a + \frac{1}{2}\right) la + \varpi(a)$$

nous démontre que nous obtiendrons des développements de $l\Gamma(a+1)$ en développant la fonction $\varpi(a)$ donnée par l'intégrale définie

$$(2) \qquad \varpi(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-ax} \frac{dx}{x}.$$

Partons de la formule

$$(3) \qquad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots;$$

en prenant la dérivée logarithmique des deux membres, on obtient

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \cdots$$

ou bien

$$(4) \qquad \frac{1}{x^2}(x\cot x - 1) = -2\left(\frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} + \cdots\right);$$

remplaçant la cotangente par des exponentielles, puis substituant $\frac{ix}{2}$ à x, il vient

$$(5) \qquad \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_1^\infty \frac{1}{4m^2\pi^2 + x^2}.$$

On obtient ensuite, par la division,

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{4m^2\pi^2+x^2} = \dfrac{1}{(2m\pi)^2} - \dfrac{x^2}{(2m\pi)^4} + \dots \\ \qquad \dots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2m\pi)^{2n}} + \dfrac{(-1)^n\theta_m x^{2n}}{(2m\pi)^{2n+2}} \end{cases}$$

en posant

$$(7)\quad \theta_m = \frac{4m^2\pi^2}{4m^2\pi^2+x^2}.$$

La valeur de θ_m est comprise entre 0 et 1.

Donnons à m les valeurs successives 1, 2,... jusqu'à l'infini et ajoutons ensuite tous les résultats obtenus, en remarquant que si l'on pose

$$\sum_1^\infty \theta_m \frac{1}{2m\pi^{2n+2}} = \theta \sum_1^\infty \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

θ sera nécessairement compris entre 0 et 1; on aura

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right) = 2\sum_1^\infty \dfrac{1}{(2m\pi)^2} - 2x^2 \sum_1^\infty \dfrac{1}{(2m\pi)^4} + \dots \\ \quad + (-1)^{n-1} 2x^{2n-2} \sum_1^\infty \dfrac{1}{(2m\pi)^{2n}} + (-1)^n 2\theta x^{2n} \sum_1^\infty \dfrac{1}{(2m\pi)^{2n+2}}, \end{cases}$$

et si l'on fait

$$(9)\quad \frac{B^n}{2n!} = \frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots\right),$$

il viendra

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{B_1}{1.2} - \dfrac{B_2}{4!}x^2 + \dots \\ \qquad \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{B^n}{2n!}x^{2n-2} + (-1)^n\theta\dfrac{Bn+1}{(2n+2)!}x^{2n}, \end{cases}$$

où $0 < \theta < 1$.

La fonction de x qui constitue le premier membre de cette formule ne devient infinie que pour des valeurs de x comprises

dans la formule $x = 2k\pi i$, k étant un nombre entier positif ou négatif, mais différent de zéro; cette fonction est donc développable en série convergente par la formule de Mac-Laurin pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x de module inférieur à 2π, en sorte qu'on a dans cette hypothèse

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{B_1}{12} - \dfrac{B_2}{4!}x^2 + \dots \\ \qquad\qquad \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{2n!}x^{2n-2} + \dots, \end{cases}$$

la série étant prolongée indéfiniment.

Mais la formule (10) subsiste pour toutes les valeurs réelles de x et elle fait connaître l'expression du reste de la série quand on s'arrête au terme de rang n.

Les coefficients B qui se présentent ici ont reçu le nom de nombres de Bernoulli. Ils s'offrent dans ce qui précède comme quotients de deux transcendantes, mais ce sont des nombres rationnels et on peut les obtenir comme il suit.

On a identiquement

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1 + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}}{x(e^x - e^{-x})},$$

en sorte que l'on peut écrire la formule (10) sous la forme

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}\left[1 + \frac{B_1}{1.2}x^2 - \frac{B_2}{4!}x^4 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}x^{2n} + \dots\right],$$

c'est-à-dire, en remplaçant les exponentielles par leurs valeurs en séries,

$$\frac{1}{2}\left(2 + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots\right) = \left(1 + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots\right)\left(1 + \frac{B_1}{1.2}x^2 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}x^{2n} + \dots\right).$$

Les deux séries du second membre sont absolument convergentes, donc si l'on effectue leur produit et qu'on l'ordonne par rapport aux puissances de x, on reproduit identiquement la série contenue dans le premier membre. En égalant les coefficients des différentes puissances de x, on a

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + B_1 = 0,$$
$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{2} B_1 - B_2 = 0,$$

et ainsi de suite. On a en général

$$0 = \frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{2}\frac{1}{2n!} + \frac{1}{(2n-1)!}\frac{B_1}{1.2} - \frac{1}{(2n-3)!}\frac{B_2}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{(2n-2p+1)!}\frac{B_p}{2p!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{1}\frac{B_n}{2n!},$$

qui détermine B_n si l'on connaît $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$. On voit que les quantités B se déterminent successivement et de plus que tous ces nombres sont rationnels.

La formule (2) permet alors d'écrire $\varpi(a)$ sous la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(a) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-ax}\frac{dx}{x} \\ &= \frac{B_1}{1.2}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx - \frac{B_2}{4!}\int_0^\infty x^2 e^{-ax}\,dx + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}\int_0^\infty x^{2n-2} e^{-ax}\,dx \\ &\quad + (-1)^n \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^\infty \Theta\, x^{2n} e^{-ax}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Toutes les intégrations sauf la dernière s'effectuent immédiatement; l'intégrale $\int_0^\infty \Theta\, x^{2n}\, e^{-ax}\, dx$ est positive et inférieure à $\int_0^\infty x^{2n}\, e^{-ax}\, dx$, c'est-à-dire à $\frac{2n!}{a^{2n+1}}$, on peut donc la représenter par $\frac{\theta 2n!}{a^{2n+1}}$, en désignant par θ une quantité comprise entre 0 et 1.

Il vient ainsi :

$$(13)\quad \varpi(a) = \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{a^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{a^{2n-1}} + (-1)^n\theta\frac{B^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{a^{2n+1}},$$

et par suite on a pour toute valeur positive de a

$$(14)\quad l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2}l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)la + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{a^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{a^{2n-1}} + (-1)^n\theta\frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{a^{2n+1}}.$$

En prolongeant à l'infini la série du second membre, on a la formule

$$(15)\quad l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2}l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)la + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a^3} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{a} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2_n}\frac{1}{a^{2n-1}} + \ldots.$$

Cette série est divergente quelque grande que soit la valeur attribuée à a; en effet, la valeur absolue du terme général $\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{a^{2n-1}}$ est égale au produit des deux quantités

$$\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{2}{2\pi a}\cdot\frac{3}{2\pi a}\cdots\frac{2n-2}{2\pi a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi^2 a}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots\right)$$

d'après la définition des coefficients B_n (9). La seconde de ces expressions a pour limite $\frac{1}{2\pi^2 a}$ quand n augmente indéfiniment; la première expression, au contraire, augmente au delà de toute limite, car elle est un produit dont les facteurs inférieurs à 1 sont en nombre limité, tandis que le nombre de ceux qui sont supérieurs à 1 et même à telle quantité que l'on voudra peut devenir plus grand que tout nombre donné. Il résulte de là que les termes de la série croissent à partir d'un certain rang au delà de toute limite, et, par suite, cette série est divergente.

Malgré sa divergence, cette série donne un procédé exact et commode pour calculer $l\Gamma(a+1)$ et l'approximation que l'on peut obtenir ainsi est d'autant plus grande que a est plus considérable. En effet, les formules établies montrent que si a est supérieur à 1, les termes multipliés par les nombres B dans la formule qui nous occupe vont d'abord en décroissant, et l'on voit que l'erreur commise est toujours moindre en valeur absolue que le premier des termes négligés.

On aura donc la plus grande approximation possible en s'arrêtant au terme qui précède le terme minimum, et ce terme minimum donnera une limite supérieure de l'erreur que l'on aura commise.

Si, par exemple, on néglige complètement dans la formule les termes multipliés par les coefficients B, l'erreur commise sera positive et inférieure à $\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a}$ ou $\frac{1}{12a}$, car $B_1 = \frac{1}{6}$; on a donc

$$(16)\qquad \begin{cases} l\Gamma(a+1) > \frac{1}{2} l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right) la, \\ l\Gamma(a+1) < \frac{1}{2} l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right) la + \frac{1}{12a}, \end{cases}$$

ou bien

$$(17)\qquad \begin{cases} \Gamma(a+1) > \sqrt{2\pi}\, e^{-a}\, a^{a+\frac{1}{2}}, \\ \Gamma(a+1) < \sqrt{2\pi}\, e^{-a}\, a^{a+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{12a}}. \end{cases}$$

Ces formules permettent d'obtenir deux limites du nombre de Bernoulli B_n. On a

$$(18)\qquad B_n = \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} S_{2n}, \qquad B_1 = \frac{S_2}{\pi^2},$$

en posant

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots.$$

On en tire

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}\frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}, \qquad \frac{B_n}{B_1} = \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}}\frac{S_{2n}}{S_2},$$

et comme S_{2n} décroît quand n augmente, on a

$$(19) \qquad \frac{B_{n+1}}{B_n} < \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}, \qquad \frac{B_n}{B_1} < \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}},$$

ou bien

$$(20) \qquad \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{B_n}{4\pi^2}, \qquad B_n < \frac{1}{12}\frac{\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n-2}}.$$

La dernière formule donne une limite supérieure de B_n, on aura une limite inférieure en remplaçant, dans l'expression primitive de B_n, S_{2n} par l'unité, on aura ainsi :

$$(21) \qquad B_n > \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}.$$

Remplaçons maintenant $\Gamma(2n+1)$ par les limites supérieure et inférieure trouvées précédemment et il viendra

$$(22) \qquad \begin{cases} B_n < \dfrac{1}{12}\dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{3}{2}}}e^{-2n}e^{\frac{1}{24n}}, \\ B_n > 2\dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n+\frac{1}{2}}}e^{-2n}. \end{cases}$$

Ces formules conduisent à une détermination facile de l'approximation avec laquelle on peut calculer $l\Gamma(a+1)$ par le développement trouvé précédemment.

Soit u_n le terme qui dépend des coefficients B_n, on aura, si l'on ne considère que les valeurs absolues des termes

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}}{B_n}\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{a^2},$$

et, à cause de la première des formules (19),

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{(2n-1)2n}{4\pi^2 a^2},$$

ou encore, *a fortiori*,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n^2}{\pi^2 a^2} < \left(\frac{n}{3a}\right)^2.$$

Donc, u_{n+1} sera inférieur à u_n tant qu'on aura $n < 3a$ ou $n = 3a$. Nous voyons donc que si a est plus grand que 1, la série trouvée pour $\varpi(a)$ est décroissante dans ses derniers termes; si a est un nombre entier, les termes successifs sont de plus en plus petits certainement jusqu'au terme de rang $3a$ et même de rang $3a+1$.

Désignons par ε_n la valeur absolue de l'erreur commise en s'arrêtant dans le développement au terme multiplié par B_n, on sait que l'on a

$$\varepsilon_n < \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{a^{2n+1}},$$

ou encore, à cause de la formule (19)

$$\varepsilon_n < \frac{B_n}{4\pi^2 a^{2n+1}},$$

et en remplaçant B_n par sa valeur approchée,

$$\varepsilon_n < \frac{1}{6} \frac{(n\pi)^{\frac{1}{2}}}{a} \left(\frac{n}{e\pi a}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}}.$$

Nous avons vu qu'il convenait d'aller dans le développement au moins jusqu'au terme $3a$. En faisant $n = 3a$ dans la formule précédente, il vient

$$\varepsilon_{3a} < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{6a-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{72a}} a^{-\frac{1}{2}} e^{-6a},$$

et comme a est égal à 1, on a à plus forte raison

$$\varepsilon_{3a} < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{-\frac{1}{72}} a^{-\frac{1}{2}} e^{-6a}$$
$$< 0{,}393409 \ldots \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{6a},$$

et l'on voit que l'approximation est d'autant plus grande que a

est plus considérable. L'erreur commise est en tout cas du signe du premier terme négligé.

La série que nous avons obtenue pour $l\Gamma(a+1)$ a reçu le nom de formule de Stirling.

Dans sa *Methodus Differentialis sive Tractatus de summatione serierum...*, Stirling avait résolu une quantité de problèmes importants de la théorie des séries et plusieurs questions concernant en particulier les expressions de fonctions de très grands nombres qui se présentent si fréquemment dans la théorie des probabilités. C'est parmi ces formules que se trouve celle qui a spécialement attiré l'attention des géomètres et que l'on a désigné sous le nom de formule de Stirling.

Cette formule n'est qu'un cas particulier d'une formule trouvée par Mac-Laurin et que l'on attribue généralement à Euler. La formule générale et le cas particulier qui nous occupe sont des séries divergentes. Leur emploi devrait donc être rejeté. D'autre part, la série de Stirling est d'une utilité telle qu'on peut la considérer comme indispensable; on se voyait donc forcé de la conserver malgré sa divergence. Il était cependant impossible de faire pour cette série une exemption aussi extraordinaire et aussi peu légitime. C'est pourtant ce qu'ont fait Legendre (*Exercices*, t. I, p. 294) et Gauss lui-même (*Werke*, t. III, p. 152).

Binet (*J. Ec. Pol.*, cahier XXVIII, 3e p.) a essayé de remédier à cet inconvénient en substituant à la formule de Stirling d'autres développements toujours convergents; mais la série de Stirling peut être conservée à la condition de la rendre finie, c'est-à-dire de s'arrêter à un terme déterminé en donnant l'expression du reste. C'est ce qu'a fait Cauchy dans son Mémoire sur la théorie des intégrales définies singulières (*Exerc.*, t. II, p. 395). Plus tard, Schaar (*Mém. Cour. Ac. Belg.*) donna une nouvelle expression du reste. Cette question importante donna naissance à de nombreux et remarquables travaux.

Cauchy, *C. R.*, t. XXXIX, p. 133.

Raabe, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 147; t. XXVIII, p. 10.

Limbourg, *Théorie de la fonction gamma*. Gand, 1859.
Liouville, *J. de Liou.*, t. XVII, p. 448.
Malmsten, *J. de Cr.*, t. XXXV, p. 55.
Genocchi, *Bull. Ac. Belg.*, t. XXI, p. 64.
Bauer, *J. de Cr.*, t. LVII, p. 256.
Genocchi, *Annali di Sc. M. e f.*, III, p. 406, V, p. 91 et 102.
Bonnet, *C. R.*, t. L, p. 863.
Gilbert, *Mém. Ac. Belg.*, t. XLI.
Hermite, *Atti di Torino*, t. XIV, p. 95.
Bourguet, *Ann. Ec. Nor.*; thèse, p. 56.

La détermination du terme où il faut s'arrêter dans la série de Stirling n'a été faite au moyen de l'expression du reste que nous avons donnée que d'une façon imparfaite, quoique suffisante dans les applications. Les différentes expressions du reste par des intégrales définies obtenues dans les Mémoires que nous venons de citer conduisent à des résultats plus précis.

Schaar s'occupa de cette question (*Mém. Cour. Ac. Belg.*, t. XXII, p. 7 et 12). Limbourg (*Théorie de la fonction gamma*) a fait voir que les termes vont en diminuant jusqu'au rang dont l'indice est compris entre $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{1}{7\pi a}$ et $\pi a + \frac{3}{4}$ en désignant par a la valeur de l'argument. Genocchi (*Il Cimento*, t. VI, p. 606) a énoncé une limite moins précise. Bourguet (*Ann. Ec. Nor.*; thèse, p. 27) a trouvé pour valeur de l'indice $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{3}{32\pi a}$ en négligeant les termes de degré supérieur par rapport à $\frac{1}{\pi a}$.

En ce qui concerne les nombres de Bernoulli, remarquons que Adams (*J. de Cr.*, t. LXXXV, p. 265) a donné les valeurs des 62 premiers nombres.

Une bibliographie très complète de la théorie de ces nombres a été donnée par Ely (*Am. J. of Math.*, t. V, 1882, p. 228-235).

§ **14.** La formule de Stirling donne en la différentiant une ou plusieurs fois des formules qui peuvent être utiles, bien qu'elles soient divergentes.

Remarquons, en effet, que dans la formule (12) du paragraphe précédent, la quantité θ est indépendante de a. On aura donc, en différentiant μ fois,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}(-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}\varpi(a)}{da^{\mu}} &= \frac{B_1}{1.2}\int_0^{\infty} e^{-ax}x^{\mu}\,dx - \dots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}\int_0^{\infty} e^{-ax}x^{\mu+2n-2}\,dx \\ &+ (-1)^{n}\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^{\infty}\theta\, e^{-ax}x^{\mu+2n}\,dx,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, en raisonnant comme nous l'avons fait précédemment,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}(-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}\varpi(a)}{da^{\mu}} &= B_1\frac{\mu!}{2!}\frac{1}{a^{\mu+1}} - B_2\frac{(\mu+2)!}{4!}\frac{1}{a^{\mu+3}} + \dots \\ &+ (-1)^{n-1}B_n\frac{(\mu+2n-2)!}{2n!}\frac{1}{a^{\mu+2n-1}} \\ &+ (-1)^{n}\theta\, B_{n+1}\frac{(\mu+2n)!}{(2n+2)!}\frac{1}{a^{\mu+2n+1}},\end{aligned}\right.$$

θ étant une nouvelle quantité positive comprise entre 0 et 1.

Quand a est suffisamment grand, les termes du second membre vont d'abord en décroissant, et l'erreur commise quand on s'arrête à un terme quelconque est moindre que le terme suivant et de même signe que ce terme.

La formule

$$(3)\qquad l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2}l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)la + \varpi(a)$$

donne

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{dl\Gamma(a+1)}{da} &= la + \frac{1}{2a} + \frac{d\varpi(a)}{da}, \\ (-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}l\Gamma(a+1)}{da^{\mu}} &= \frac{(\mu-2)!}{a^{\mu-1}} - \frac{(\mu-1)!}{2a^{\mu}} + (-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}\varpi(a)}{da^{\mu}}.\end{aligned}\right.$$

On obtient donc par substitution

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}(-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}l\Gamma(a+1)}{da^{\mu}} &= \frac{(\mu-2)!}{a^{\mu-1}} - \frac{(\mu-1)!}{2a^{\mu}} + B_1\frac{\mu!}{2!}\frac{1}{a^{\mu+1}} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1}B_n\frac{(\mu+2n-2)}{2n!}\frac{1}{a^{\mu+2n-1}} \\ &\quad + (-1)^n 0\,B_{n+1}\frac{(\mu+2n)!}{(2n+2)!}\frac{1}{a^{\mu+2n+1}}.\end{aligned}\right.$$

Ces résultats permettent de calculer la constante d'Euler avec telle approximation qu'on le voudra.

En supposant a entier, on a, d'après la formule (16) du § 8,

$$(6)\qquad \gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{a} - \frac{dl\Gamma(a+1)}{da},$$

mais les formules précédentes nous donnent le développement de $\frac{dl\Gamma(a+1)}{da}$ et il vient, en substituant,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}\gamma &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{a}\right) - la - \frac{1}{2a} \\ &\quad + \frac{B_1}{2a^2} - \frac{B_2}{4a^4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n\,a^{2n}} + \dots,\end{aligned}\right.$$

la série qui se trouve dans le second membre étant divergente, mais telle que, si l'on s'arrête au terme qui dépend de B_n, l'erreur commise est moindre, en valeur absolue, que $\frac{B_{n+1}}{(2n+2)\,a^{2n+2}}$. On pourra donc, en prenant a suffisamment grand, obtenir γ avec l'approximation que l'on veut.

Comme nous l'avons déjà dit à l'occasion du calcul de la constante d'Euler, la formule (7), qui est alors la plus pratique malgré sa divergence, a été donnée par ce géomètre en 1769 (*N. Comm.*, t. XIV, p. 153) [V. § 7].

§ **15.** L'expression de $\varpi(a)$ sous forme d'intégrale définie conduit à d'autres développements en séries.

On a

$$(1) \qquad \varpi(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-ax} \frac{dx}{x},$$

ou bien, à cause de l'identité

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{e^x(x-2)+2+x}{x^2(1-e^x)},$$

$$\varpi(a) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^x(x-2)+(2+x)}{x^2(1-e^x)} e^{ax}\, dx.$$

En développant en série l'exponentielle qui apparaît au numérateur, il vient

$$(2) \quad \varpi(a) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{e^x-1} \left[\frac{x}{3!} + \frac{2x^2}{4!} + \dots \frac{nx^n}{(n+2)!} + \dots \right] dx.$$

Considérons dès lors l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^n e^{-ax}}{e^x-1}\, dx;$$

elle peut s'écrire, en multipliant et divisant par e^{-x},

$$\int_0^\infty x^n \frac{e^{-(a+1)x}}{1-e^{-x}}\, dx,$$

ou bien, en effectuant la division,

$$\int_0^\infty x^n \left[e^{-(a+1)x} + e^{-(a+2)x} + \dots \right] dx.$$

Or, on a en général

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\, dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}},$$

en sorte que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{x^n e^{-ax}}{e^x-1} dx = n! \left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}} + \frac{1}{(a+2)^{n+1}} + \dots \right] = n! \sum_1 \frac{1}{(a+p)^n}.$$

En substituant dans (2), il vient

$$(3)\quad \varpi(a)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(a+p)^2}+\frac{2}{3.4}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(a+p)^3}+\ldots+\frac{n}{(n+1)(n+2)}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(a+p)^{n+1}}+\ldots\right].$$

L'expression connue de $l\Gamma(a+1)$ donne alors

$$(4)\quad \begin{cases} l\Gamma(a+1)=\dfrac{1}{2}l2\pi-a+\left(a+\dfrac{1}{2}\right)la+\dfrac{1}{2} \\ \qquad\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2.3}\left[\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(a+2)^2}+\ldots\right] \\ +\dfrac{2}{3.4}\left[\dfrac{1}{(a+1)^3}+\dfrac{1}{(a+2)^3}+\ldots\right] \\ +\dfrac{3}{4.5}\left[\dfrac{1}{(a+1)^4}+\dfrac{1}{(a+2)^4}\ldots+\right] \\ +\ldots \end{array}\right. \end{cases}$$

$\varpi(a)$ et par suite cette dernière série sont convergentes pour toutes les valeurs de a telles que le module de chacun des termes $(a+1)$, $(a+2)$, $(a+3)\ldots$, soit plus grand que 1, mais elle se prête difficilement au calcul numérique.

La série (4) a été donnée par Binet (*J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, p. 226). La démonstration que nous en avons donnée est de Bourguet (*Ann. Ec. Norm.*; thèse, p. 15).

Binet (*C. R.*, t. IX, p. 158) a aussi donné la formule

$$2\varpi(a)=\frac{1}{2.3}\sum\frac{1}{a^2}-\frac{2}{3.4}\sum\frac{1}{a^3}+\ldots,$$

qui a été attribuée à tort à Féaux, à différentes reprises.

Revenons encore à la formule

$$(5)\qquad \varpi(a)=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-ax}\frac{dx}{x},$$

il vient, en posant $1-e^{-x}=t$,

$$(6)\qquad \varpi(a)=-\int_0^1\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{1}{l(1-t)}\right)\frac{(1-t)^{a-1}}{l(1-t)}\,dt,$$

et occupons-nous du coefficient de $(1-t)^{a-1}$ sous le signe $\int$.

Il est facile de vérifier que l'on a identiquement :

$$\int \left(\frac{1}{2} - v\right) [1 - (1-t)^r]\, dv$$
$$= \frac{1}{2} r(1-r) - \left(\frac{1}{2} - v\right) \frac{(1-t)^r}{l(1-t)} - \frac{(1-t)^r}{[l(1-t)]^2},$$

ou bien, en prenant l'intégrale entre les limites 0 et 1,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) [1 - (1-t)^r]\, dv = \left[1 - \frac{1}{2} t + \frac{t}{l(1-t)}\right] \frac{1}{l(1-t)}.$$

Le coefficient considéré s'exprime donc sous forme d'intégrale définie et on a

$$\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{l(1-t)}\right] \frac{1}{l(1-t)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) \frac{1 - (1-t)^r}{t}\, dv.$$

Puisque v est positif et que t est compris entre 0 et 1, on peut développer $(1-t)^r$ par la formule du binôme; séparant alors les différents termes dans le second nombre, on a

$$(7) \qquad \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{l(1-t)}\right] \frac{1}{l(1-t)} = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} t + \ldots + \frac{a_m}{m!} t^{m-1} + \ldots,$$

où les coefficients a ont les valeurs suivantes :

$$(8) \qquad \begin{cases} a_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v\, dv = -\frac{1}{12}, \\ a_2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v(1-r)\, dv = 0, \\ a_3 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v(1-v)(2-v)\, dv = \frac{1}{120}, \\ a_4 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v(1-v)(2-v)(3-v)\, dv = \frac{1}{30}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v(1-v)(2-v)\ldots(m-1-v)\, dv. \end{cases}$$

En substituant dans la formule (6), on a

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} -\varpi(a) = {} & \frac{a_1}{1}\int_0^1 (1-t)^{a-1}\,dt + \frac{a_2}{1.2}\int_0^1 (1-t)^{a-1}\,t\,dt + \dots \\ & \dots + \frac{a_m}{m!}\int_0^1 (1-t)^{a-1}\,t^{m-1}\,dt + \dots. \end{aligned}\right.$$

Or, l'intégration par parties donne

$$\int_0^1 (1-t)^{a-1}\,t^{m-1}\,dt = \frac{m-1}{a+m-1}\int_0^1 (1-t)^{a-1}\,t^{m-2}\,dt,$$

et comme on a directement

$$\int_0^1 (1-t)^{a-1}\,dt = \frac{1}{a},$$

il vient

$$\int_0^1 (1-t)^{a-1}\,t^{m-1}\,dt = \frac{(m-1)!}{a(a+1)\dots(a+m-1)},$$

et par suite

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} -\varpi(a) = {} & \frac{1}{1}\frac{a_1}{a} + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a(a+1)} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{m}\frac{a_m}{a(a+1)\dots(a+m-1)} + \dots. \end{aligned}\right.$$

On a donc

$$(11)\quad l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2}l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)la - \sum_1^x \frac{1}{m}\frac{a_m}{a(a+1)\dots(a+m-1)},$$

série convergente pour toute valeur de a et particulièrement lorsque a est assez grand.

La formule (11) est encore donnée par Binet dans son Mémoire sur les intégrales Eulériennes (*J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, p. 339). La démonstration que nous avons donnée est de Schlömilch (*Compendium*, t. II, p. 260).

Binet a aussi donné un autre développement à peu près de même forme que le précédent (p. 231) :

$$2\varpi(a) = \frac{b_0}{a+1} + \frac{1}{2}\frac{b_1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{3}\frac{b_2}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \ldots,$$

où les coefficients ont, d'après M. Bourguet qui a tiré ce développement de la formule (3), les valeurs suivantes (*Ann. de l'Ec. Norm.;* thèse, p. 59) :

$$b_0 = \frac{1}{6}, \quad b_1 = \frac{1}{3}, \quad b_2 = \frac{59}{60}, \quad b_3 = \frac{58}{15}, \quad b_4 = \frac{533}{28},$$
$$b_5 = \frac{1577}{14}, \quad b_6 = \frac{280361}{360}, \quad b_7 = \frac{277244}{45}, \quad b_8 = \frac{36889359}{660},$$
$$b_9 = \frac{71769745}{132}, \quad b_{10} = \frac{21632296401}{364}.$$

Binet s'était occupé de la démonstration de la convergence de ces séries. Cette question et celle de la détermination du reste quand on s'arrête à un certain terme, ont été reprises par Genocchi (*Bull. Ac. Belg.*, t. XXI, p. 84; t. XXXVI, p. 550; *Annales Tortolini*, t. II, p. 380), par de Tilly (*Bull. Ac. Belg.*, t. XXXV, p. 30) et par Gilbert (*Mém. Ac. Belg.*, t. XLI, p. 14-22). Il nous aurait fallu presque doubler l'étendue de cette monographie pour exposer les différents résultats auxquels on est parvenu à ce sujet.

§ **16.** La formule

$$(1) \qquad l\Gamma(a) = a\,ln - \left[la + l\left(1+\frac{a}{1}\right)\right] + \ldots + l\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

donne, en prenant la dérivée des deux membres,

$$(2) \qquad \frac{dl\Gamma(a)}{da} = \psi(a) = ln - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \ldots - \frac{1}{a+n}.$$

A ce point de vue on peut remarquer que $l\Gamma(a)$ et $\psi(a)$ se présentent comme différences de deux quantités infiniment grandes.

Il n'en sera plus de même de la dérivée seconde $\frac{d^2 l\Gamma(a)}{da^2}$ que nous désignons par $\chi(a)$. On a en effet

$$(3)\quad \frac{d^2 l\Gamma(a)}{da^2} = \chi(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2+n)^2} + \ldots,$$

la série étant prolongée indéfiniment. Cette série est convergente pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de a. Elle définit une fonction, pour tous les points du plan, qui ne présente de pôles qu'aux points $0, -1, -2, \ldots -n, \ldots$

Aux propriétés fondamentales de la fonction Γ correspondent pour χ les propriétés suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \chi(a+1) - \chi(a) = -\dfrac{1}{a^2}, \\ \chi(a) + \chi(1-a) = \left(\dfrac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2, \\ \chi(a) + \chi\left(a+\dfrac{1}{n}\right) + \ldots + \chi\left(a+\dfrac{n-1}{n}\right) = n^2\chi(na). \end{cases}$$

Nous les déduisons par différentiation, mais elles peuvent être démontrées directement en partant de la série (3) qui définit $\chi(a)$.

La formule (3) a été donnée par Gauss (*Werke*, t. III, p. 154). Genocchi (*Bull. Ac. Belg.*, t. XXXVI, p. 557) a remarqué que cette expression de $\frac{d^2 l\Gamma(a)}{da^2}$ était une conséquence immédiate des résultats auxquels Euler était arrivé en traitant des fonctions *inexplicables* (*Calc. Diff.*, t. II, p. 615).

C'est à l'aide de cette formule que Legendre a démontré la relation de Gauss (*Exerc.*, t. II, p. 17). Il avait déjà rencontré (*Exerc.*, t. I, p. 261) dans la théorie des intégrales Eulériennes des séries plus générales que celle qui figure dans le second membre de l'équation (3). L'importance de cette même formule a été reconnue depuis longtemps.

Serret, *Calc. D. et I.*, t. II, p. 209.

Schlömilch, *Studien*, t. I, p. 44.

Meyer, *Vorlesungen...*, p. 154.

M. Hermite (*Cours rédigé par Andoyer*, p. 94...) a montré que l'on pouvait prendre cette formule comme base de la théorie des fonctions gamma.

On peut démontrer, en partant de l'expression de $\chi(a)$ en série, que la fonction $\frac{1}{\Gamma(a)}$ est holomorphe dans tout le plan.

Multiplions les deux membres de l'équation

$$\chi(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(a+n)^2} + \ldots \tag{5}$$

par da, et intégrons entre les limites 1 et a, on aura

$$\begin{aligned} \psi(a) = -c + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \ldots \\ \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) + \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

série convergente puisque le terme général est

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n} = \frac{a-n}{(n+1)(a+n)}.$$

La constante c se détermine en faisant $a = 1$, et on aura

$$-c = \psi(1) = -\gamma,$$

γ étant la constante d'Euler.

Changeons a en $a+1$, multiplions de nouveau par da et intégrons entre les limites 0 et a, on a

$$l\frac{1}{\Gamma(a+1)} = \gamma a + [l(1+a) - a] + \ldots + \left[l\left(1+\frac{a}{n}\right) - \frac{a}{n}\right] + \ldots, \tag{7}$$

et il est inutile d'ajouter une constante, comme on le vérifie en faisant $a = 0$.

En développant dans le terme général le logarithme, on voit immédiatement que cette série est convergente pour toute valeur de a.

Repassant des logarithmes aux nombres, il vient

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{\gamma a} \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}}; \tag{8}$$

$\frac{1}{\Gamma(a+1)}$ est donc une fonction holomorphe dans tout le plan, et on a son expression sous forme de facteurs primaires.

Les recherches de Vandermonde, Kramp, Bessel, Crelle, Eytelwein, Oettinger, Ohm, Raabe et Hoppe sur les factorielles ou facultés analytiques, avaient conduit à des résultats intéressants, mais aussi à des contradictions que l'on ne pouvait lever. Weierstrass (*J. de Cr.*, LI, p. 1 — 60) reprit la question de la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour définir les facultés analytiques.

C'est dans ce mémoire fondamental que Weierstrass établit l'holomorphisme de la fonction $\frac{1}{\Gamma(a)}$ et la décomposa en facteurs primaires.

Au dernier point de vue, il est à remarquer que Newman (*Camb. and Dub. J.*, t. III, p. 59) avait déjà mis $\Gamma(a)$ sous la forme

$$\Gamma(a) = \frac{e^{-\gamma a}}{a} \; 1 \frac{e^{a}}{1+a} \frac{e^{\frac{a}{2}}}{\left(1+\frac{a}{2}\right)} \cdots$$

Schlömilch (*Anal. Stud.*, t. I, p. 45) a retrouvé cette dernière formule en la tirant de la définition de Gauss.

M. Bourguet a montré très simplement l'holomorphisme de $\frac{1}{\Gamma(a)}$ en remarquant que $\sin a\pi\Gamma(a) = \sin a\pi[P(a) + Q(a)]$; $\sin a\pi Q(a)$ est holomorphe, dans le produit $\sin a\pi P(a)$ les pôles disparaissent. On en conclut que $\frac{1}{\Gamma(1-a)}$ et par suite $\frac{1}{\Gamma(a)}$ est holomorphe (*Ann. Ec. Norm.*, thèse, p. 29).

La formule

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{\gamma a} \prod_{1}^{\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}}$$

donne

$$\Gamma(a) = \frac{e^{-\gamma a}}{a \prod \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}}},$$

et on peut employer cette forme donnée à la fonction gamma pour en démontrer simplement les propriétés fondamentales. Nous nous en servirons pour établir une formule qui comprend comme cas particulier la relation des compléments.

Cette relation peut être mise sous la forme

$$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

ou bien encore, en employant l'expression de $\sin a\pi$ sous forme de produit infini :

$$\frac{1}{\Gamma(1-\rho_1 a)\Gamma(1-\rho_2 a)} = \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right),$$

en désignant par ρ_1 et ρ_2 les racines de l'équation

$$\rho^2 = 1.$$

D'une façon plus générale, en désignant par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ les racines de l'équation

$$\rho^\nu = 1,$$

on aura

$$\frac{1}{\Gamma(1-\rho_1 a)\Gamma(1-\rho_2 a)\ldots\Gamma(1-\rho_\nu a)} = \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{a^\nu}{n^\nu}\right),$$

ou encore

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 a)\Gamma(z-\rho_2 a)\ldots\Gamma(z-\rho_\nu a)} = \prod_0^{\infty}\left(1 - \frac{a^\nu}{(z+n)^\nu}\right).$$

En effet, en désignant par ω le premier membre de la dernière formule, et remplaçant Γ par son expression (2), il vient

$$\omega = \frac{(z-\rho_1 a)\ldots(z-\rho_\nu a)\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}-\rho_1\frac{a}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}-\rho_\nu\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{\nu z}{n}}}{z^\nu \prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}};$$

mais on a

$$\left(1+\frac{z}{n}-\rho_1\frac{a}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}-\rho_\nu\frac{a}{n}\right)=\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu-\left(\frac{a}{n}\right)^\nu$$
$$=\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu\left(1-\frac{a^\nu}{(z+n)^\nu}\right)$$

et par suite

$$\omega=\frac{(z^\nu-a^\nu)\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu\left(1-\frac{a^\nu}{(z+n)^\nu}\right)e^{-\frac{\nu z}{n}}}{z^\nu\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}},$$

ou bien, en supprimant les facteurs communs,

$$\omega=\prod_0^\infty\left(1-\frac{a^\nu}{(z+n)^\nu}\right),$$

et la formule est démontrée. En faisant $z=1$, $\nu=2$, on a la relation des compléments.

Lorsque l'on fait $z=1$, ν étant supérieur à 2, la fonction qui apparaît dans le second membre n'est jamais périodique, et il en est de même de la fonction

$$a^\mu\prod_1^\infty\left(1-\frac{a^\nu}{n^\nu}\right).$$

En effet, les zéros de cette fonction sont à l'intersection des cercles de rayon 0, 1, 2,... avec les segments partant de l'origine et faisant avec Ox des angles respectivement égaux à $0, \frac{2\pi}{\nu}, \frac{4\pi}{\nu},\ldots \frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}$. Leur distribution dans le plan est donc bien différente de celle qui s'offre dans le cas des fonctions périodiques.

Cauchy s'était occupé des relations qui existent entre les fonctions Γ (*Exerc.*, t. II, p. 398...); Liouville signala certaines particularités du quotient $\frac{\Pi\Gamma(ap+b)}{\Pi\Gamma(a'p+b')}$ où $\Sigma a=\Sigma a'$. La propriété démontrée précédemment est due à Mellin (*Acta Math.*, t. III, p. 102). Voir aussi Hermite (*Cours rédigé par Andoyer*, p. 105).

CALCUL DE LA FONCTION GAMMA

Développements en séries.

§ **17.** On a, d'après ce qui a été dit jusqu'ici, différentes formules générales pour calculer par approximation les fonctions gamma.

On a d'une part

$$l\Gamma(1+a) = -\gamma a + \frac{1}{2}S_2 a^2 - \frac{1}{3}S_3 a^3 + \frac{1}{4}S_4 a^4 - \ldots,$$

$$l\Gamma(1+a) = \frac{1}{2} l \frac{\pi a}{\sin \pi a} - \gamma a - \frac{1}{3}S_3 a^3 - \frac{1}{5}S_5 a^5 - \ldots,$$

$$l\Gamma(1+a) = \frac{1}{2} l \frac{\pi a}{\sin \pi a} - \frac{1}{2} l \frac{1+a}{1-a} + (1-\gamma)a - (S_3 - 1)\frac{a^3}{3} - \ldots.$$

Lorsqu'il s'agit de calculer $l\Gamma(b)$ pour une valeur donnée de b, on peut toujours réduire la question au cas où $b = 1 + a$, a étant $< \frac{1}{2}$ ou même $< \frac{1}{4}$. Les suites précédentes sont alors convergentes, en sorte que le degré d'approximation auquel on peut parvenir avec elles n'est limité que par l'approximation même avec laquelle on connaît S_2, S_3, S_4, ...

Si l'on veut avoir les logarithmes ordinaires de la fonction Γ, il faut multiplier par le module $m = 0{,}43429\ldots$ tous les termes algébriques du développement employé.

En posant, par exemple,

$$m(1-\gamma)=B,\quad \frac{m}{3}(S_3-1)=B_3,\quad \frac{m}{5}(S_5-1)=B_5,\ \ldots,$$

on a

$$\log\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\log\frac{\pi a}{\sin\pi a}-\frac{1}{2}l\frac{1+a}{1-a}+Ba-B_3a^3-B_5a^5-\ldots.$$

Il est cependant préférable d'employer la formule de Stirling :

$$l\Gamma(a)=\frac{1}{2}l2\pi-a+\left(a-\frac{1}{2}\right)la+\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a}-\frac{B_2}{3.4}\frac{1}{a^3}+\frac{B_3}{5.6}\frac{1}{a^4}-\ldots.$$

Ce développement donne $l\Gamma(a)$ avec une approximation d'autant plus considérable que a est plus grand; il est facile de voir, par exemple (§ 13), que pour avoir $l\Gamma(a)$ avec douze décimales exactes, il faut que l'on ait $a>5$ et il suffira alors de calculer les sept ou huit premiers termes de la suite qui apparaît dans le second membre.

Si l'on veut connaître la fonction gamma quand l'argument varie de 1 à 2, on se servira de la formule

$$l\Gamma(a)=l\Gamma(4+a)-l[a(1+a)(2+a)(3+a)],$$

où le second membre est maintenant facile à calculer.

Legendre a donné des tables de $\log\Gamma(a)$ de millième en millième, d'abord avec sept décimales (*Exerc.*, t. I, p. 302), puis avec douze décimales (t. II, p. 86).

Bessel (*Werke*, t. II, p. 350) donne des tables de la fonction $\log\frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}}$.

Gauss a fait calculer par Nicolaï les tables suivantes de $\log\Gamma(a)$ à vingt décimales et de $\psi(a)$ à dix-huit décimales de centième en centième.

Bellavitis (*Mem. del Ist. Veneto*, 1874) a donné entre autres tables celle de $l\Gamma(a)$ de dixième en dixième, depuis 10 jusqu'à 12 et à 8 décimales.

z	$\log\Gamma(z)$	$\psi(z)$
1,00	0,000 000 0000 000 000 0000	−0,577 215 6649 0153 2861
1,01	9,997 528 7306 586 917 2624	0,560 885 4578 6867 4498
1,02	9,995 127 8719 887 903 4144	0,544 789 3104 5617 9789
1,03	9,992 796 4208 888 358 9748	0,528 921 0872 8543 0502
1,04	9,990 533 4004 084 290 0595	0,513 274 8789 1683 0312
1,05	9,988 337 8587 901 204 6216	0,497 844 9912 9987 0371
1,06	9,986 208 8685 558 194 5437	0,482 625 9358 1482 5705
1,07	9,984 145 5256 352 356 7773	0,467 612 4198 6755 3632
1,08	9,982 146 9485 340 317 2902	0,452 799 3380 0171 2885
1,09	9,980 212 2775 395 113 6603	0,438 181 7634 9533 4764
1,10	9,978 340 6739 618 075 4713	0,423 754 9404 1107 6796
1,11	9,976 531 3194 086 625 0820	0,409 514 2760 7169 4248
1,12	9,974 783 4150 920 112 8963	0,395 455 3339 3429 2807
1,13	9,973 096 1811 646 908 3029	0,381 573 8268 3879 2064
1,14	9,971 468 8560 856 996 6779	0,367 865 6106 0774 9546
1,15	9,969 900 6960 125 290 3489	0,354 326 6779 7627 9272
1,16	9,968 390 9742 191 752 7943	0,340 953 1528 3226 1794
1,17	9,966 938 9805 385 265 6982	0,327 741 2847 4839 2299
1,18	9,965 544 0208 278 942 4567	0,314 687 4437 8886 0621
1,19	9,964 205 4164 565 313 6262	0,301 788 1155 7461 0030
1,20	9,962 922 5038 140 483 5193	0,289 039 8965 9218 8296
1,21	9,961 694 6338 386 986 2929	0,276 439 4897 3219 2051
1,22	9,960 521 1715 645 657 7252	0,263 983 7000 4422 0200
1,23	9,959 401 4956 867 388 4734	0,251 669 4306 9610 0107
1,24	9,958 334 9981 436 138 7302	0,239 493 6791 2593 6794
1,25	9,957 321 0837 155 075 4011	0,227 453 5333 7626 5408

z	$\log \Gamma(z)$	$\psi(z)$
1,26	9,956 359 1696 388 143 5774	−0,215 546 1686 0026 5182
1,27	9,955 448 6852 349 806 3412	0,203 768 8437 3062 3157
1,28	9,954 589 0715 536 082 8076	0,192 118 8983 0222 1732
1,29	9,953 779 7810 290 385 6417	0,180 593 7494 2036 9178
1,30	9,953 020 2771 498 007 7695	0,169 190 8888 6679 9656
1,31	9,952 310 0341 403 435 2140	0,157 907 8803 3614 1874
1,32	9,951 648 5366 544 970 3876	0,146 742 3567 9599 6017
1,33	9,951 035 2794 801 439 0879	0,135 692 0179 6416 9332
1,34	9,950 469 7672 546 026 1315	0,124 754 6278 9700 3946
1,35	9,949 951 5141 902 540 1627	0,113 928 0126 8308 8296
1,36	9,949 480 0438 099 648 7612	0,103 210 0582 3697 7615
1,37	9,949 054 8886 918 851 5282	0,092 598 7081 8786 1259
1,38	9,948 675 5902 232 172 2697	0,082 091 9618 5840 6487
1,39	9,948 341 6983 625 752 5751	0,071 687 8723 2928 1510
1,40	9,948 052 7714 105 718 7897	0,061 384 5445 8511 6146
1,41	9,947 808 3757 882 873 3374	0,051 180 1337 3789 7756
1,42	9,947 608 0858 232 930 2469	0,041 072 8433 2402 4375
1,43	9,947 451 4835 429 174 2066	0,031 060 9236 7144 7052
1,44	9,947 338 1584 744 573 0981	0,021 142 6703 3353 0475
1,45	9,947 267 7074 520 516 3055	0,011 316 4225 8644 5845
1,46	9,947 239 7344 299 485 6529	0,001 580 5619 8708 3418
1,47	9,947 253 8503 019 093 0853	+0,008 066 4890 1136 4893
1,48	9,947 309 6727 265 039 6072	0,017 626 2683 8884 9468
1,49	9,947 406 8259 580 663 9475	0,027 100 2758 3548 6201
1,50	9,947 544 9406 830 857 3196	0,036 489 9739 7857 6520

z	$\log \Gamma(z)$	$\psi(z)$
1,51	9,947 723 6538 618 222 8429	+ 0,045 796 7895 6191 4496
1,52	9,947 942 6085 749 455 0351	0,055 022 1145 7955 1622
1,53	9,948 201 4538 750 006 5798	0,064 167 3073 6607 7154
1,54	9,948 499 8446 425 196 6174	0,073 233 6936 4536 5776
1,55	9,948 837 4414 465 997 3817	0,082 222 5675 3964 4344
1,56	9,949 213 9104 097 814 3536	0,091 135 1925 4063 5189
1,57	9,949 628 9230 770 649 4873	0,099 972 8024 4444 4623
1,58	9,950 082 1562 889 107 6887	0,108 736 6022 5178 1439
1,59	9,950 573 2920 580 773 8191	0,117 427 7690 3501 1042
1,60	9,951 102 0174 501 551 2544	0,126 047 4527 7347 6253
1,61	9,951 668 0244 676 613 6244	0,134 596 7771 5844 5210
1,62	9,952 271 0099 375 678 9859	0,143 076 8403 6898 0212
1,63	9,952 910 6754 021 370 4917	0,151 488 7158 1995 8383
1,64	9,953 586 7270 129 479 7674	0,159 833 4528 8341 5463
1,65	9,954 298 8754 279 998 8466	0,168 112 0775 8432 7804
1,66	9,955 046 8357 117 833 7730	0,176 325 5932 7189 4293
1,67	9,955 830 3272 382 157 9829	0,184 474 9812 6732 9607
1,68	9,956 649 0735 963 406 4632	0,192 561 2014 8913 2418
1,69	9,957 502 8024 986 952 5351	0,200 585 1930 5674 7012
1,70	9,958 391 2456 922 548 0685	0,208 547 8748 7349 3948
1,71	9,959 314 1388 718 645 0668	0,216 450 1461 8960 4789
1,72	9,960 271 2215 960 751 9880	0,224 292 8871 4615 7521
1,73	9,961 262 2372 053 011 9641	0,232 076 9593 0067 2792
1,74	9,962 286 9327 422 222 3320	0,239 803 2061 3509 6466
1,75	9,963 345 0588 743 545 6829	0,247 472 4535 4686 1164

z	$\log \Gamma(z)$	$\psi(z)$
1,76	9,964 436 3698 187 192 0339	+ 0,255 085 5103 2368 8336
1,77	9,965 560 6232 685 379 8084	0,262 643 1686 0276 2795
1,78	9,966 717 5803 218 910 1417	0,270 146 2043 1488 3540
1,79	9,967 907 0054 122 714 6665	0,277 595 3776 1416 8016
1,80	9,969 128 6662 409 761 4416	0,284 991 4332 9386 1542
1,81	9,970 382 3337 112 727 1250	0,292 335 1011 8877 9580
1,82	9,971 667 7818 642 865 8993	0,299 627 0965 6488 7544
1,83	9,972 984 7878 165 527 1065	0,306 868 1204 9650 1033
1,84	9,974 333 1316 991 794 0601	0,314 058 8602 3156 8639
1,85	9,975 712 5965 985 736 1442	0,321 199 9895 4547 9708
1,86	9,977 122 9684 986 785 1092	0,328 292 1690 8382 0641
1,87	9,978 564 0362 246 764 4771	0,335 336 0466 9448 5409
1,88	9,980 035 5913 881 118 2162	0,342 332 2577 4952 8903
1,89	9,981 537 4283 333 901 3630	0,349 281 4254 5713 5499
1,90	9,983 069 3440 856 111 1078	0,356 184 1611 6405 9720
1,91	9,984 631 1382 996 952 0321	0,363 041 0646 4888 1123
1,92	9,986 222 6132 107 643 7381	0,369 852 7244 0640 1469
1,93	9,987 843 5735 857 393 0651	0,376 619 7179 2349 8793
1,94	9,989 493 8266 761 166 4682	0,383 342 6119 4674 0214
1,95	9,991 173 1821 718 910 9803	0,390 021 9627 4204 3086
1,96	9,992 881 4521 565 884 4947	0,396 658 3163 4666 2402
1,97	9,994 618 4510 633 767 9375	0,403 252 2088 1377 1306
1,98	9,996 383 9956 322 243 2515	0,409 804 1664 4989 0838
1,99	9,998 177 9048 680 732 0161	0,416 314 7060 4541 4956
2,00	0,000 000 0000 000 000 0000	0,422 784 3350 9846 7139

§ **18.** La marche de la fonction $l\Gamma(a)$ nous montre que la fonction $\Gamma(a)$ a un minimum pour une valeur de a comprise entre 1,46 et et 1,47.

La formule

$$l\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\,l\frac{a\pi}{\sin a\pi}-\frac{1}{2}\,l\frac{1+a}{1-a}+(1-\gamma)a-(S_3-1)\frac{a^3}{3}-\ldots$$

permet de trouver une valeur approchée de la position où il y a minimum.

Legendre a trouvé qu'il correspondait à la valeur

$$a=1{,}46163\ 21451\ 105$$

et que l'on a alors

$$l\Gamma(a)=9{,}94723\ 91743\ 9340.$$

La formule élémentaire

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=-\gamma+\left(1-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}\right)+\ldots$$

montre au moyen de la méthode de Plana que l'équation $\Gamma'(a)=0$ n'a pas de racines imaginaires et qu'en outre de la racine positive, elle en possède une infinité d'autres toutes négatives, et comprises successivement entre 0 et -1, -1 et -2, ... Les valeurs de la variable auquelles correspondent les maxima ou les minima de la fonction tendent de plus en plus à se rapprocher des pôles.

Partons de l'équation

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}-\frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)}=-\pi\cot a\pi$$

et soit, pour une grande valeur de a, $a=-n+x$ la racine de l'équation $\Gamma'(a)=0$ comprise entre $-a+1$ et $-a$. On a pour déterminer x la condition

$$\frac{\Gamma'(n+1-x)}{\Gamma(n+1-x)}=\pi\cot\pi x,$$

qui devient, en tenant compte de la valeur approchée,

$$l\Gamma(a+1)=\frac{1}{2}l2\pi-a-\left(a+\frac{1}{2}\right)la,$$

$$l(n-x)+\frac{1}{2(n-x)}=\pi\cot\pi x,$$

ou bien, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$,

$$ln=\pi\cot\pi x,$$

$$x=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{ln}=\frac{1}{ln};$$

on a donc à peu près

$$a=-n+\frac{1}{ln}.$$

C'est à M. Hermite (*J. de Cr.*, t. XCI, p. 336) que l'on doit cette démonstration si élégante. M. Bourguet (*Atti di Torino*, t. XVI p. 758) est revenu sur cette question, il a donné les valeurs correspondant aux deux premiers intervalles

$$x_1=0{,}504072,\qquad x_2=0{,}573587.$$

En général x_1 et x_2 étant deux racines correspondant à deux intervalles consécutifs, la racine correspondant à l'intervalle suivant est comprise entre

$$x_2 \quad \text{et} \quad 2x_2-x_1.$$

§ **19.** Nous avons vu précédemment que la fonction $\frac{1}{\Gamma(a)}$ était holomorphe dans tout le plan et par suite développable en série convergente pour toute valeur de a. Occupons-nous de la détermination des coefficients de ce développement.

Posons

$$\frac{1}{\Gamma(a)}=G(a).$$

on a

$$G(a) = \lim n^{-a} a(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\dots\left(1+\frac{a}{n}\right).$$

Écrivons

$$\left(1+\frac{a}{2}\right)\dots\left(1+\frac{a}{n}\right) = 1 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_{n-1} a^{n-1},$$

le coefficient A_i étant la somme des combinaisons i à i des quantités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}$. Or, on a en général

$$i\Sigma a_1 a_2 \dots a_i = \Sigma a_1 \Sigma a_1 a_2 \dots a_{i-1} - \Sigma a_1^2 \Sigma a_1 a_2 \dots a_{i-2} + \dots + \dots + (-1)^{i-1} \Sigma a_i^i,$$

et par suite

$$iA_i = S_1 A_{i-1} - S_2 A_{i-2} + \dots + (-1)^{i-1} S_{i-1};$$

les coefficients A ne dépendent donc que de $S_1, S_2, \dots, S_n$.

D'autre part

$$n^{-a} = 1 - \frac{a\,ln}{1} + \frac{a^2 (ln)^2}{2!} - \frac{a^3 (ln)^3}{3!} + \dots,$$

et par suite

$$\frac{G(a)}{a(a+1)} = \left[1 - \frac{a\,ln}{1} + \frac{a^2 (ln)^2}{2!} - \frac{a^3 (ln)^3}{3!} + \dots\right] [1 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_n a^n] = 1 + A'_1 a + A'_2 a' + \dots,$$

en posant

$$A'_i = A_i - A_{i-1} \frac{ln}{1} + A_{i-2} \frac{(ln)^2}{2!} + \dots + (-1)^i \frac{(ln)^i}{i!}.$$

Or, si l'on pose

$$-s_1 + ln = C,$$

on a successivement

$$A'_1 = -C,$$
$$2A'_2 = -CA'_1 - s_2,$$
$$3A'_3 = -CA'_2 - s_2 A'_1 + s_3,$$

et en général

$$iA'_i = -CA'_{i-1} - s_2 A'_{i-2} + s_3 A'_{i-3} - \dots + (-1)^{i-1} s_i,$$

et lorsque n augmente indéfiniment on sait, d'après la définition de la constante d'Euler, que

$$C = -s_1 + ln = 1 - \gamma.$$

Les formules précédentes permettent donc de calculer successivement les coefficients cherchés.

Il est facile de faire entrer le facteur $(1 + a)$ dans le développement. Les nouveaux coefficients s'obtiennent par l'addition de deux coefficients consécutifs.

La même méthode s'applique au développement de

$$\frac{1}{a(a+1)}\,\frac{1}{\Gamma(a)} = e^{-Ca}(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots).$$

Les développements précédents permettent de trouver une série pour $\Gamma(a)$ présentant quelque utilité.

On a

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a(a+1)}\,\frac{1}{(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots)},$$

les coefficients A étant maintenant connus.

Le facteur

$$\frac{1}{1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots}$$

ne devient infini pour aucune valeur de a de module moindre que 2; on peut donc développer en série ordonnée suivante les puissances de a dans un cercle de rayon égal à deux et écrire par suite

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a(a+1)}(1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots),$$

les coefficients B devant satisfaire à l'identité :

$$1 = (1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots)(1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots).$$

On peut donc déterminer successivement les quantités B par la formule

$$B_i + B_{i-1} A_1 + \ldots + B_1 A_{i-1} + A_i = 0.$$

Nous avons mis $\Gamma(a)$ sous la forme

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a),$$

où $Q(a)$ est une fonction holomorphe; occupons-nous du développement de cette fonction. On a, d'après ce qui a été vu,

$$Q(a) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a^n + \ldots,$$

où

$$n!\, c_n = \int_1^\infty e^{-x} (lx)^n \frac{dx}{x}.$$

On peut tout d'abord trouver une limite de c_n. Écrivons

$$c_n = \frac{1}{n!} \int_1^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} \left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n dx,$$

or, le maximum du facteur $\left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n$ est $\left(\frac{2}{e}\right)^n$, on a donc

$$c_n < \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{e}\right)^n \int_1^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx < \left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)},$$

ou bien encore, en employant la relation de Gauss-Legendre,

$$c_n < \frac{2}{n} \left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ par sa valeur approchée

$$c_n < \frac{\sqrt{2e}}{n} \frac{1}{\left[(n+1)\frac{e}{2}\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

Mais pour le calcul des coefficients, il convient d'avoir recours aux développements déjà trouvés.

On a

$$a(a+1)\Gamma(a) = 1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots;$$

mais

$$\begin{aligned} a(a+1)\Gamma(a) = \Gamma(a+2) &= P(a+2) + Q(a+2) \\ &= P(a+2) + \frac{a+2}{e} a(a+1) Q(a) \\ &= P(a+2) + \frac{2}{e} + c_0 \left| \begin{array}{l} x + c_1 \\ + c_0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x^2 + c_2 \\ + c_1 \end{array} \right| x^2 + \ldots. \\ &\quad + \frac{a}{e} \end{aligned}$$

Le développement de $P(a+2)$ résulte immédiatement du développement de $\frac{1}{n+a}$ suivant les puissances de a. Égalant alors les coefficients des différentes puissances de a dans les deux expressions de $\Gamma(a+2)$, on a

$$-\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1}\frac{1}{3^2}+\frac{1}{1.2}\frac{1}{4^2}-\dots\right)+\frac{2}{e}+c_0=B_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{1}\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{1}{1.2}\frac{1}{4^{n+2}}-\dots\right)+c_{n-1}+c_n=B_{n+1}\dots$$

On peut donc calculer successivement c_0, c_1, c_2, ...

Les développements qui précèdent et les calculs auxquels ils conduisent ont été faits par M. Bourguet :

Ann. Ec. Norm. ; thèse, p. 38;

Bull. Darboux, t. V$_2$, p. 43;

Acta Math., t. II, p. 261 ...

Nous reproduisons plus loin ses tableaux de coefficients.

Schlömilch (*Schl. Z.*, t. XXV, p. 337) déduit de la formule

$$\Gamma(1+\rho)=e^{-\gamma\rho}\,\frac{e^{\rho}}{1+\rho}\,\frac{e^{\frac{\rho}{2}}}{1+\frac{\rho}{2}}\cdots$$

la possibilité du développement suivant :

$$\frac{e^{-\rho\gamma}}{\Gamma(1+\rho)}=H_0+H_1\rho+H_2\rho^2+\dots$$

où l'on a

$$H_0=1,\quad H_1=0,\quad H_2=-\frac{\pi^2}{12},\quad mH_m=\sum_{k=2}^{k=m}(-1)^{k-1}H_{m-k}\sum_{h=1}^{h=\infty}h^{-k}.$$

Il en déduit

$$\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}=K_0+K_1\rho+K_2\rho^2+\dots,$$

$$(m+1)K^{m+1}=\gamma K_m-\sum_{k=2}^{k=m+1}(-1)^k K_{m-k+1}\sum_{h=1}^{h=\infty}h^{-k};$$

il donne également K_n sous forme d'intégrale définie.

Tableau des coefficients A

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = a(a+1)\,(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots).$$

$A_1 = -0,$	4227	8433	5098	4671
$A_2 = -0,$	2330	9373	6421	7867
$A_3 = +0,$	1910	9110	1387	6915
$A_4 = -0,$	0245	5249	0005	4000
$A_5 = -0,$	0176	4524	4550	1443
$A_6 = +0,$	0080	2327	3022	2673
$A_7 = -0,$	0008	0432	9775	6044
$A_8 = -0,$	0003	6083	7816	2548
$A_9 = +0,$	0001	4559	6142	1399
$A_{10} = -0,$	0000	1754	5859	7517
$A_{11} = -0,$	0000	0258	8995	0224
$A_{12} = +0,$	0000	0133	8501	5466
$A_{13} = -0,$	0000	0020	5474	3152
$A_{14} = -0,$	0000	0000	0159	5268
$A_{15} = +0,$	0000	0000	6275	6218
$A_{16} = -0,$	0000	0000	1273	6143
$A_{17} = +0,$	0000	0000	0092	3397
$A_{18} = +0,$	0000	0000	0012	0028
$A_{19} = -0,$	0000	0000	0004	2202
$A_{20} = +0,$	0000	0000	0000	5240
$A_{21} = -0,$	0000	0000	0000	0140
$A_{22} = -0,$	0000	0000	0000	0067

Tableau des coefficients a

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = a + a_2 a^2 + a_3 a^3 + a_4 a^4 + \ldots$$

$a_1 = +1,$	0000	0000	0000	0000
$a_2 = +0,$	5772	1566	4901	5329
$a_3 = -0,$	6558	7807	1520	2538
$a_4 = -0,$	0420	0263	5034	0952
$a_5 = +0,$	1665	3861	1382	2915
$a_6 = -0,$	0421	9773	4555	5443
$a_7 = -0,$	0096	2197	1527	8770
$a_8 = +0,$	0072	1894	3246	6630
$a_9 = -0,$	0011	6516	7591	8591
$a_{10} = -0,$	0002	1524	1674	1149
$a_{11} = +0,$	0001	2805	0282	3882
$a_{12} = -0,$	0000	2013	4854	7741
$a_{13} = -0,$	0000	0125	0493	4758
$a_{14} = +0,$	0000	0113	3027	2314
$a_{15} = -0,$	0000	0020	5633	8420
$a_{16} = +0,$	0000	0000	6116	0950
$a_{17} = +0,$	0000	0000	5002	0075
$a_{18} = -0,$	0000	0000	1181	2746
$a_{19} = +0,$	0000	0000	0104	3425
$a_{20} = +0,$	0000	0000	0007	7826
$a_{21} = -0,$	0000	0000	0003	6962
$a_{22} = +0,$	0000	0000	0000	5100
$a_{23} = -0,$	0000	0000	0000	0207

Tableau des coefficients du développement

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = e^{-Ca}\, a(a+1)\,(1 + A_2\, a^2 + A_3\, a^3 + \ldots)$$

$C = +0,$	4227	8433	5098	4671
$A_2 = -0,$	3224	6703	3424	1132
$A_3 = +0,$	0673	5230	1053	1981
$A_4 = +0,$	0314	1168	5394	9022
$A_5 = -0,$	0143	3334	5686	2387
$A_6 = +0,$	0004	2566	6389	5753
$A_7 = +0,$	0009	2680	6472	5897
$A_8 = -0,$	0002	1927	6360	3432
$A_9 = -0,$	0000	0265	0983	9844
$A_{10} = +0,$	0000	1021	5199	3474
$A_{11} = -0,$	0000	0185	4328	3265
$A_{12} = -0,$	0000	0000	6534	1544
$A_{13} = +0,$	0000	0005	8247	6956
$A_{14} = -0,$	0000	0001	0048	4862
$A_{15} = +0,$	0000	0000	0251	4687
$A_{16} = +0,$	0000	0000	0188	6871
$A_{17} = -0,$	0000	0000	0035	7806
$A_{18} = +0,$	0000	0000	0002	0025
$A_{19} = +0,$	0000	0000	0000	3314
$A_{20} = -0,$	0000	0000	0000	0878
$A_{21} = +0,$	0000	0000	0000	0069

Tableau des coefficients du développement

$$\Gamma(a) = P(a) + c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots$$

$c_0 =$	0,	2193	8393	4395	5203
$c_1 =$	0,	0978	4319	7216	6725
$c_2 =$	0,	0356	0349	1928	4726
$c_3 =$	0,	0110	7089	5446	0110
$c_4 =$	0,	0030	2761	1195	8767
$c_5 =$	0,	0007	4265	8300	4889
$c_6 =$	0,	0001	6575	6256	0585
$c_7 =$	0,	0000	3403	1394	8701
$c_8 =$	0,	0000	0648	2609	8154
$c_9 =$	0,	0000	0115	3713	5309
$c_{10} =$	0,	0000	0019	2937	4300
$c_{11} =$	0,	0000	0003	0464	9169
$c_{12} =$	0,	0000	0000	4560	7157
$c_{13} =$	0,	0000	0000	0649	6268
$c_{14} =$	0,	0000	0000	0088	3033
$c_{15} =$	0,	0000	0000	0011	4985
$c_{16} =$	0,	0000	0000	0001	4247
$c_{17} =$	0,	0000	0000	0000	1814

Tableau des coefficients du développement

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a(a+1)}(1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots).$$

$B_1 = +0,$	4227	8433	5098	4671
$B_2 = +0,$	4118	4033	0426	4396
$B_3 = +0,$	0815	7691	9247	0863
$B_4 = +0,$	0742	4901	0753	5137
$B_5 = -0,$	0002	6698	2068	7450
$B_6 = +0,$	0111	5404	5718	1309
$B_7 = -0,$	0028	5264	5821	1553
$B_8 = +0,$	0021	0393	3340	6975
$B_9 = -0,$	0009	1957	3838	8259
$B_{10} = +0,$	0004	9038	8450	8226
$B_{11} = -0,$	0002	4094	1435	8311
$B_{12} = +0,$	0001	2167	3806	5265
$B_{13} = -0,$	0000	6079	2891	3175
$B_{14} = +0,$	0000	3045	3557	0349
$B_{15} = -0,$	0000	1523	4935	8969
$B_{16} = +0,$	0000	0762	1779	6964
$B_{17} = -0,$	0000	0381	2110	4003
$B_{18} = +0,$	0000	0190	6491	6577

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE LA FONCTION GAMMA

L'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \tag{1}$$

a reçu le nom d'*intégrale Eulérienne de première espèce.* Suivant une notation adoptée par plusieurs auteurs, nous la désignerons par $B(p, q)$.

La fonction $B(p, q)$ se ramène aisément aux fonctions gamma ou intégrales Eulériennes de seconde espèce.

Cette intégrale est une fonction symétrique de p et de q. Si l'on pose, en effet, $x = 1 - y$, l'intégrale devient

$$\int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy = B(q,p),$$

et on a donc

$$B(p,q) = B(q,p).$$

Si, dans la formule (1), on pose $x = \frac{z}{1+z}$, on a

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz, \tag{2}$$

et par conséquent aussi, à cause de la symétrie démontrée,

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz. \tag{3}$$

En ajoutant membre à membre les formules (2) et (3), on trouve

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} B(p,q) &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{1} \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz, \end{aligned}\right.$$

et si, dans la seconde intégrale, on fait $z = \frac{1}{y}$, elle devient

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^{p-1}+y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy.$$

Les deux termes du second membre de (4) sont donc égaux, et l'on obtient B (p, q) sous cette nouvelle forme :

$$(5)\qquad B(p,q) = \int_0^1 \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz.$$

On a entre les fonctions B et les fonctions Γ la relation

$$(6)\qquad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Si l'on multiplie, en effet, les deux intégrales

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\,dx,$$

$$\Gamma(b) = \int_0^{\infty} e^{-y}y^{b-1}\,dy,$$

on obtient

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}e^{-y}y^{b-1}\,dx\,dy.$$

Posons

$$x = uv, \qquad y = u(1-v),$$

et il vient

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\,\Gamma(b) &= \int_0^{\infty}\int_0^{1} e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,du\,dv \\ &= \Gamma(a+b)\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,dv,\end{aligned}$$

et par suite

$$\int_0^1 v^{a-1}(1+v)^{b-1}\,dv = \mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Si, par exemple, on fait $a+b=1$, on obtient, en prenant B sous la forme (2),

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z}, \tag{7}$$

formule déjà établie précédemment.

On peut ramener aux intégrales Eulériennes de première espèce et par conséquent aux fonctions Γ l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx. \tag{8}$$

Si l'on pose, en effet,

$$x^m = y,$$

elle devient

$$\frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1}(1-y)^{q-1}\,dy = \frac{1}{m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}. \tag{9}$$

On peut au moyen de cette intégrale trouver des relations curieuses.

On a, par exemple,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 (1-x^4)^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 x^2(1-x^4)^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)},$$

et en multipliant ces deux équations membre à membre, on a la relation

$$(10)\qquad \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{16\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\pi}{4}.$$

Les recherches sur les intégrales (1) et (8) remontent en réalité à Wallis.

On doit encore citer à ce propos la lettre de Newton à Oldenbourg, du 24 août 1766.

La même question s'offrit à Stirling (*Tractatus... de interpolatione...*, p. 125).

Mais les premiers travaux importants sur l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}\,dx$$

sont dus à Euler qui représentait cette intégrale par le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ (*Nov. Comm. Ac. Petr.*, t. XVI, p. 91) ou bien encore par le symbole $(p.\ q)$ (*Nov. Acta Ac. Petr.*, t. V, p. 86) et qui a traité à différentes reprises des réductions qui existent pour une même valeur de n entre les intégrales correspondant à des valeurs entières et différentes de p et de q.

Legendre (*Exerc.*, t. I, p. 221) adopta tout d'abord le signe $\left(\frac{p}{q}\right)$, puis (*Exerc.*, t. II, p. 3) il montra la réduction de l'intégrale précédente à l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

pour laquelle il a choisi le symbole $(p,\ q)$.

La notation $\mathrm{B}\,(p,\ q)$ est de Binet (*J. Ec. Pol.*, cah. XXVII) et a été généralement adoptée.

La formule

$$\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$$

avait été démontrée par Euler dans le cas où l'on a $p+q=1$.

Legendre la démontra d'une façon générale (*Exerc.*, t. I, p. 222).

La réduction des intégrales Eulériennes de première espèce aux fonctions gamma remonte à Euler (*Calc. Int.*, t. IV, p. 93 et p. 252), mais le procédé d'Euler pas plus que celui de Legendre (*Exerc.*, t. II, p. 6) ne présentaient la rigueur nécessaire.

Poisson (*J. Ec. Pol.*, cah. XVI, p. 404) donna une première démonstration rigoureuse; celle qui précède n'est qu'une modification due à Jacobi du procédé de Poisson (*J. de Cr.*, t. XI, p. 307).

On est revenu bien des fois sur cette propriété importante.

Lejeune-Dirichlet, *J. de Cr.*, t. XV, p. 266.

Plana, *J. de Cr.*, t. XVII, p. 25.

Binet, *J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, § 15, p. 295.

Cauchy, *J. Ec. Pol.*, cah. XXVIII, p. 147.

Lobatschewski, *Mém. Kasan*, 1835, p. 1.

Schaar, *Mém. Cour. Brux.*, t. XXII.

Catalan, *C. R.*, t. XLVII, p. 545.

Realis, *Battagl. G.*, IX, p. 345.

. . . . . .

Dans un Mémoire excessivement remarquable, Binet (*J. Ec. Pol.*, cah. XXVII) s'est occupé d'une façon toute particulière des fonctions B considérées indépendamment de la fonction gamma. Il a traité tout au long la question du développement en série de B (p, q). Il a été en même temps amené naturellement à examiner différents développements de la fonction Γ que nous avons eu l'occasion de citer.

§ **21.** Considérons l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \, dx.$$

Si l'on pose

$$\sin x = y,$$

on trouve

$$(1)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}x\cos^{n-1}x\,dx = \int_0^1 y^{m-1}(1-y^2)^{\frac{n}{2}-1}dy = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

Si en particulier on fait $m = n$, on en déduit

$$(2)\quad \frac{1}{2^{m-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}2x\,dx = \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi} \sin^{m-1}z\,dz = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^2}{2\Gamma(m)}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\int_0^{\pi} \sin^{m-1}z\,dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}z\,dz = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}.$$

Comparant les deux valeurs de l'intégrale $\int_0^{\pi} \sin^{m-1}z\,dz$ ainsi obtenues et remplaçant $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ par sa valeur, on retrouve la relation de Legendre, cas particulier de la relation de Gauss:

$$2^{m-1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(m).$$

La formule (1) s'est présentée à plusieurs auteurs :
Jacobi, *J. de Cr.*, t. XV, p. 1.
Schlömilch, *Gr. Arc.*, t. IV, p. 316.
Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXVIII, p. 162; p. 216.
Ohm, *Bestimmte Int.*, p. 49.
Lobatschewski, *Mém. Kasan*, 1835, p. 211.
Bonnet, *J. de Liou.*, t. VI, p. 238.
Raabe, *Integr. Rech.*, p. 222.

On a

$$(3)\quad \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}\,dx = \frac{1}{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}}\,\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Posons, en effet,

$$\frac{x}{1-x} = y,$$

et l'intégrale devient

$$\int_0^x \frac{y^{\alpha-1}}{[(1+a)\,y+a]^{\alpha+\beta}}\,dy,$$

et en faisant

$$(1+a)\,y = a\,z,$$

on obtient

$$\frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}\int_0^x \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^{\alpha+\beta}}\,dz = \frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Si l'on suppose $\alpha+\beta = 1$, on a

$$(4)\qquad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha\,x^{1-\alpha}\,(x+a)} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1-\alpha)}{a^{1-\alpha}(1+a)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi\,.\,a^{1-\alpha}\,(1+a)^\alpha}.$$

Si dans l'équation (1) on fait $x = \cos^2\theta$, on a

$$(5)\qquad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2\alpha-1}\theta\sin^{2\beta-1}\theta}{(a+\cos^2\theta)^{\alpha+\beta}}\,d\theta = \frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+b)},$$

qui peut s'écrire, en posant $a+1 = mk$, $a = nk$,

$$(6)\qquad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2\alpha-1}\theta\sin^{2\beta-1}\theta}{(m\cos^2\theta+n\cos^2\theta)^{\alpha+\beta}}\,d\theta = \frac{1}{m^\alpha\,n^\beta}\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Les formules (3) et (4) ont été données par Abel (*J. de Cr.*, t. II, p. 22).

Pour la formule (6) voir Schlömilch (*Höhere Analysis*, p. 85).

L'expression de $\psi(a+1)$ sous forme d'intégrale définie conduit à la détermination au moyen de fonctions gamma de quelques intégrales remarquables.

On a

$$\frac{d l\Gamma(a+1)}{da} = \int_0^1 \left(\frac{1}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^a}{1-x} \right) dx, \tag{7}$$

et en changeant a en $a+b$, b désignant une constante positive,

$$\frac{d l\Gamma(a+b+1)}{da} = \int_0^1 \left(\frac{1}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a+b}}{1-x} \right) dx,$$

et, par soustraction,

$$\frac{d}{da} l\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)} = \int_0^1 x^a \frac{1-x^b}{1-x} dx.$$

En intégrant relativement à a entre les limites 0 et a, on en déduit

$$l\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)} = \int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^b)}{(1-x) l\frac{1}{x}} dx. \tag{8}$$

On a de même :

$$l\frac{\Gamma(a+b+c+1)}{\Gamma(a+c+1)\Gamma(b+1)} = \int_0^1 \frac{(1-x^{a+c})(1-x^b)}{(1-x) l\frac{1}{x}} dx,$$

et par soustraction

$$l\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(a+b+c+1)}{\Gamma(a+b+1)\Gamma(a+c+1)} = \int_0^1 \frac{x^a(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x) l\frac{1}{x}} dx. \tag{9}$$

Dans l'équation (8) changeons a en c et soustrayons membre à membre les équations (8) ainsi transformée et (9), il vient :

$$l\frac{\Gamma(a+b+1)\Gamma(a+c+1)\Gamma(b+c+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)\Gamma(a+b+c+1)} = \int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x) l\frac{1}{x}} dx. \tag{10}$$

En continuant d'appliquer le même procédé, on arrive d'une façon générale à exprimer au moyen des fonctions gamma les intégrales

$$(11)\qquad \int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^b)\dots}{(1-x)\,l\frac{1}{x}}\,dx$$

et

$$(12)\qquad \int_0^1 \frac{x^a(1-x^b)(1-x^c)\dots}{(1-x)\,l\frac{1}{x}}\,dx,$$

quel que soit le nombre des facteurs qui apparaissent au numérateur.

Si dans l'équation (9) on remplace x par x^2, on obtient la formule

$$(13)\qquad \int_0^1 \frac{x^{2a+1}(1-x^{2b})(1-x^{2c})}{(1-x^2)\,lx}\,dx = l\,\frac{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma(a+c+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(a+b+c+1)},$$

et, en faisant $c=\frac{1}{2}$,

$$(14)\qquad \int_0^1 \frac{x^{2a+1}(1-x^{2b})}{(1+x)\,lx}\,dx = l\,\frac{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma\left(a+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)},$$

ou bien, si l'on fait $2a+1=\alpha-1$, $2(a+b)+1=\beta-1$,

$$(15)\qquad \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}-x^{\beta-1}}{(1+x)\,lx} = l\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}.$$

La formule générale (12) fournit la relation suivante

$$(16)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^a(x-1)^n}{lx}\,dx \\ \qquad \displaystyle=\sum_0^n (-1)^p \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}\,l(n+a+1-p) \end{cases}$$

lorsqu'on y fait $b = c = d = \ldots = 1$, et que l'on emploie la relation $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

En posant $l\frac{1}{x} = z$, et $a+1 = p$, la formule précédente devient :

$$(17)\quad -\int_0^\infty \frac{e^{-pz}(e^{-z}-1)^n\,dz}{z} = \sum_0^n (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\, l(n+a+1-p).$$

Des cas particuliers des formules (7) à (12) avaient été donnés par

Legendre, *Exerc.*, t. II, p. 111.

Cisa de Grésy, *Mém. Turin*, 1821, p. 209.

Binet, *J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, p. 123.

Mais c'est à Stern (*Gött. Studien*, 1847) que sont dues les formules générales.

Kummer (*J. de Cr.*, t. XVII, p. 210) avait donné la formule (15).

§ **22**. Occupons-nous maintenant des intégrales

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx.$$

Nous partirons de la formule

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}e^{-zx}\,dz,$$

qui donne

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \cos bx\,dx \int_0^\infty e^{-zx}z^{n-1}\,dz,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \sin bx\,dx \int_0^\infty e^{-zx}z^{n-1}\,dz;$$

ou bien, en changeant l'ordre des intégrations,

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}\,dz\int_0^\infty e^{-zx}\cos bx\,dx, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}\,dz\int_0^\infty e^{-zx}\sin bx\,dx. \end{cases}$$

Or, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

donne, en y faisant $a = z - bi$,

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-zx}\cos bx\,dx = \frac{z}{b^2+z^2}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-zx}\sin bx\,dx = \frac{b}{b^2+z^2}, \end{cases}$$

en sorte qu'il vient :

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^2}{b^2+z^2}\,dz, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{bz^{n-1}}{b^2+z^2}\,dz; \end{cases}$$

et en posant $z^2 = b^2u$, les intégrales des seconds membres se ramènent à des intégrales connues, et l'on a enfin :

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)}\,\frac{\pi}{2\cos\dfrac{n\pi}{2}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)}\,\frac{\pi}{2\sin\dfrac{n\pi}{2}}. \end{cases}$$

La première de ces formules suppose n compris entre 0 et 1, et la seconde le suppose compris entre 0 et 2. Dans tous les autres cas, les intégrales sont infinies.

On peut distinguer comme cas particuliers ceux où $\Gamma(n)$ s'exprime sous forme finie.

En faisant $n = 1$, on a,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

En faisant $n = \frac{1}{2}$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}. \tag{7}$$

La formule (6) était connue depuis longtemps.

Euler, *Calc. Int.*, t. IV, p. 139.
Mascheroni, *Adnol.*, p. 52.
Bidone, *Mém. Turin*, 1812, p. 231.
Fourier, *Chaleur*, p. 415.
Laplace, *Prob.*, p. 229.
Lobatschewski, *Mém. Kasan*, 1835, p. 211.
— *J. de Cr.*, t. XXIV, p. 164.
Schlömilch, *Gr. Arc.*, t. I, p. 417.
— *J. de Cr.*, t. XXXVI, 268.

Il en est de même des formules (7).

Legendre, *Exerc.*, t. I, p. 369.
Bidone, *Mém. Turin*, 1812, p. 231.
Cisa de Grésy, *Mém. Turin*, 1821, p. 209.
Plana, *Mém. Bruxelles*, 1837.
Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXVIII, p. 216.

A l'égard des formules (3) nous renverrons à

Poisson, *J. Ec. Pol.*, cah. XVI, p. 225.
Grunert, *J. de Cr.*, t. VIII, p. 416.
Lobatto, *J. de Cr.*, t. XI, p. 169.
Boncompagni, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 74.
Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXVIII, p. 216.

Enfin, les intégrales (5) ont été données par Schlömilch (*Gr. Arc.*, t. VI, p. 200. — *Studien*, t. I, p. 13).

Les intégrales

$$(8)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} \cos bx\, dx, \\ \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} \sin bx\, dx, \end{cases}$$

peuvent s'obtenir de la manière suivante. Partons encore de la formule

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu},$$

et pour $a = a + bi$, il viendra

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{\mu-1} (\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx)\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(a+bi)^\mu} = \frac{\Gamma(\mu)\,(a-bi)^\mu}{(a^2+b^2)^\mu}.$$

Posons $a = \rho \cos\theta$, $b = \rho \sin\theta$; cette formule donne, en égalant les parties réelle et imaginaire,

$$(9)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{\rho^\mu} \cos \mu\theta, \\ \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{\rho^\mu} \sin \mu\theta. \end{cases}$$

Si l'on fait en particulier $a = 0$, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\rho = b$, on a

$$(10)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty \cos bx\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu} \cos \mu \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^\infty \sin bx\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu} \sin \mu \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

qui ne sont autres que les formules (4) trouvées précédemment.

Les formules (9) peuvent s'écrire sous une autre forme; on a

$$b = a \operatorname{tg}\theta,$$

$$\rho^2 = b^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\theta}\right) = \frac{b^2}{\sin^2\theta},$$

et elles deviennent

$$(11)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\, x^{\mu-1}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu}\sin^\mu\theta\cos\mu\theta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\cos^\mu\theta\cos\mu\theta, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\, x^{\mu-1}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu}\sin^\mu\theta\sin\mu\theta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\cos^\mu\theta\sin\mu\theta. \end{cases}$$

Désignons par n un nombre positif moindre que l'unité et plus petit en même temps que μ. Multiplions les deux membres de chacune des équations (11) par

$$b^{n-1}\,db = a^n\,\mathrm{tg}^{n-1}\theta\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

et intégrons de $b=0$ jusqu'à $b=\infty$ et par conséquent de $\theta=0$ à $\theta=\frac{\pi}{2}$, on a, en changeant l'ordre des intégrations dans les premiers membres,

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}\,dx\int_0^\infty b^{n-1}\cos bx\,db = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu-n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\mu-n-1}\theta\sin^{n-1}\theta\cos\mu\theta\,d\theta,$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}\,dx\int_0^\infty b^{n-1}\sin bx\,db = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu-n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\mu-n-1}\theta\sin^{n-1}\theta\sin\mu\theta\,d\theta.$$

Mais, d'après les formules établies précédemment, on a

$$\int_0^\infty b^{n-1}\cos bx\,db = \frac{\Gamma(n)}{x^n}\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty b^{n-1}\sin bx\,db = \frac{\Gamma(n)}{x^n}\sin\frac{n\pi}{2},$$

et les premiers membres deviennent

$$\Gamma(n)\cos\frac{n\pi}{2}\int_0^\infty x^{\mu-n-1}e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(\mu-n)\,\Gamma(n)\cos\frac{n\pi}{2}}{a^{\mu-n}},$$

$$\Gamma(n)\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^\infty x^{\mu-n-1}e^{-ax}dx=\frac{\Gamma(\mu-n)\,\Gamma(n)\sin\frac{n\pi}{2}}{a^{\mu-n}}.$$

On arrive ainsi à l'évaluation des intégrales suivantes :

$$(12)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\mu-n-1}\theta\sin^{n-1}\theta\cos\mu\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(\mu-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\mu)}\cos\frac{n\pi}{2},\\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\mu-n-1}\theta\sin^{n-1}\theta\sin\mu\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(\mu-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\mu)}\sin\frac{n\pi}{2}.\end{cases}$$

Si l'on suppose $n=\mu-1$, on a

$$\Gamma(\mu-n)=1,\qquad\Gamma(n)=\frac{\Gamma(\mu)}{\mu-1},$$

et il vient

$$(13)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\mu-2}\theta\cos\mu\theta\,d\theta=\frac{1}{\mu-1}\sin\frac{\mu\pi}{2},\\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\mu-2}\theta\sin\mu\theta\,d\theta=\frac{1}{\mu-1}\cos\frac{\mu\pi}{2}.\end{cases}$$

Dans les formules (12) n est compris entre 0 et 1 ; si l'on fait en particulier $n=1$, on a

$$(14)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\mu-2}\theta\cos\mu\theta\,d\theta=0,\\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\mu-2}\theta\sin\mu\theta\,d\theta=\frac{1}{\mu-1}.\end{cases}$$

En ce qui concerne les formules (9) et (10) il convient de citer :

Euler, *Cal. Int.*, t. IV, p. 134.

Lacroix, *Calc. Dif.*, t. III, p. 490.

Legendre, *Exerc.*, t. I, p. 367.

Cauchy, *J. Ec. Pol.*, cah. XXVIII, p. 147.

— *Exerc.*, 1826, p. 38.

Fuss, *Mém. Pétersb.*, 1830.

Plana, *Mém. Brux.*, 1837.

Grunert, *J. de Cr.*, t. VIII, p. 146.

Liouville, *J. de Cr.*, t. XIII, p. 210.

Schlömilch, *Gr. Arc.*, t. VI, p. 200.

Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXVIII, p. 216.

Les formules (12), (13) et (14) ont été données par Serret (*J. de Liou.*, t. VIII, p. 489) et se sont présentées à Kummer (*J. de Cr.*, t. XVII, p. 210 et t. XX, p. 1) et à Schlömilch (*Studien*, t. I, p. 24).

Il nous est impossible de donner même un résumé de toutes les intégrales définies dont l'évaluation peut être faite au moyen de la fonction gamma. Il suffit de jeter un coup d'œil, par exemple, sur les *Tables d'intégrales définies* de Bierens de Haan, pour reconnaître combien est grand le nombre de ces intégrales. Elles se rencontrent à chaque pas dans les travaux de Poisson, Cauchy, Kummer, Dirichlet, Oettinger, Schlömilch... Voir en particulier Meyer, *Vorlesungen über die Theorie du bestimmten Integrale*, 1871, p. 159-229.

§ **53.** Considérons l'intégrale multiple

$$(1) \qquad u = \iint\!\!\dots\!\int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

étendue à toutes les valeurs positives des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, qui vérifient la condition

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqq 1,$$

les nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$ étant tous positifs. On a d'une façon générale

$$(2) \qquad u = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(1 + p_1 + p_2 + \dots + p_n)}.$$

Tout d'abord, pour $n = 1$, on a

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1} dx_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(1+p_1)}.$$

Pour $n = 2$,

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{p_2-1}\,dx_2 = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1\,\frac{(1-x_1)^{p_2}}{p_2}$$

$$= \frac{\Gamma(p_2)}{\Gamma(1+p_2)}\,\mathrm{B}(p_1,\ 1+p_2) = \frac{\Gamma(p_2)}{\Gamma(1+p_2)}\,\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(1+p_2)}{\Gamma(1+p_1+p_2)},$$

$$u = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)}{\Gamma(1+p_1+p_2)},$$

la formule est donc vraie pour $n = 2$.

Pour $n = 3$, on a

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1 \int_0^{y_2} x_2^{p_2-1}\,dx_2 \int_0^{y_3} x_3^{p_3-1}\,dx_3,$$

en posant $y_2 = 1 - x_1$, $y_3 = 1 - x_1 - x_2$. Si l'on pose

$$x_3 = y_3\,z_3, \qquad x_2 = y_2\,z_2,$$

l'intégrale peut s'écrire sous la forme

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx \int_0^1 y_2^{p_2}\,z_2^{p_2-1}\,dz_2 \int_0^1 y_3^{p_3}\,z_3^{p_3-1}\,dz_3,$$

ou bien, puisque l'on a

$$y_2 = 1 - x_1, \qquad y_3 = 1 - x_1 - y_2 z_2 = (1-x_1)\,(1-z_2),$$

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx \int_0^1 (1-x_1)^{p_2} z_2^{p_2-1}\,dz_2 \int_0^1 (1-x_1)^{p_3}\,(1-z_2)^{p_3}\,z_3^{p_3-1}\,dz_3$$

$$= \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,(1-x_1)^{p_2+p_3}\,dx_1 \int_0^1 z_2^{p_2-1}\,(1-z_2)^{p_3} \int_0^1 z_3^{p_3-1}\,dz_3$$

$$= \mathrm{B}(p_1,\ 1+p_2+p_3)\,\mathrm{B}(p_2,\ 1+p_3).\,\frac{1}{p_3}$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(1+p_2+p_3)}{\Gamma(1+p_1+p_2+p_3)} \cdot \frac{\Gamma(p_2)\,\Gamma(1+p_3)}{\Gamma(1+p_2+p_3)}\,\frac{\Gamma(p_3)}{\Gamma(1+p_3)}$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\,\Gamma(p_3)}{\Gamma(1+p_1+p_2+p_3)}.$$

D'une façon générale, on posera

$$1 - x_1 = y_2, \qquad y_2 - x_2 = y_3,\ \ldots,\ y_{n-1} - x_{n-1} = y_n,$$

puis

$$x_n = y_n z_n, \quad x_{n-1} = y_{n-1} z_{n-1}, \ \ldots, \ x_2 = y_2 z_2,$$

et l'intégrale multiple se trouvera décomposée en un produit d'intégrales que l'on sait évaluer séparément. On trouve ainsi

$$u = \mathrm{B}(p_1, 1 + p_2 + \ldots + p_n)\,\mathrm{B}(p_2, 1 + p_3 + \ldots + p_n) \ldots \\ \ldots \mathrm{B}(p_{n-1}, 1 + p_n).\frac{1}{p_n},$$

et, en remplaçant les fonctions B au moyen des fonctions Γ et supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on a précisément la formule (2).

Soit maintenant l'intégrale

$$(3) \qquad v = \iint \ldots \int t_1^{q_1 - 1} t_2^{q_2 - 1} \ldots t_n^{q_n - 1}\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n$$

étendue à toutes les valeurs positives de $t_1, t_2, \ldots, t_n$, pour lesquelles on a

$$\left(\frac{t_1}{a_1}\right)^{m_1} + \left(\frac{t_2}{a_2}\right)^{m_2} + \ldots + \left(\frac{t_n}{a_n}\right)^{m_n} \leqq 1,$$

$q_1, q_2, \ldots, q_n, m_1, m_2, \ldots, m_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes positives.

Si l'on pose, d'une façon générale,

$$\left(\frac{t}{a}\right)^m = x, \quad t = a x^{\frac{1}{m}}, \quad dt = \frac{a}{m} x^{\frac{1}{m} - 1} dx,$$

il vient

$$v = \frac{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_n^{q_n}}{m_1 m_2 \ldots m_n} \iint \ldots \int x_1^{\frac{q_1}{m_1} - 1} x_2^{\frac{q_2}{m_2} - 1} \ldots x_n^{\frac{q_n}{m_n} - 1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

où

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq 1.$$

On a donc

$$(4) \qquad v = \frac{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_n^{q_n}}{m_1 m_2 \ldots m_n} \frac{\Gamma\left(\frac{q_1}{m_1}\right)\Gamma\left(\frac{q_2}{m_2}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{q_n}{m_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{q_1}{m_1} + \frac{q_2}{m_2} + \ldots + \frac{q_n}{m_n}\right)}.$$

Lejeune-Dirichlet a le premier réduit les intégrales multiples que nous venons d'étudier aux fonctions gamma.

Abh. Ak. Wiss. Berlin, 1839.

J. de Liou., t. IV, p. 164.

La démonstration qu'il donne est différente de celle que nous avons exposée et qui est due à Liouville (*J. de Liou.*, t. IV, p. 225).

La formule de Dirichlet dans le cas de trois variables fournit une détermination élégante des volumes, des centres de gravité, des moments d'inertie de toute une série de surfaces. Considérons par exemple l'ellipsoïde

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

on aura pour le huitième de son volume

$$V=\iiint dx\,dy\,dz=\frac{abc}{8}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)},$$

et, en s'appuyant sur l'expression connue de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$V=\frac{1}{6}\pi abc.$$

Considérons la surface

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4+\left(\frac{y}{b}\right)^4+\left(\frac{z}{c}\right)^4=1,$$

on a alors

$$V=\iiint dx\,dy\,dz=\frac{abc}{64}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^3}{\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)}=\frac{abc}{3.16}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^3}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)};$$

mais, d'après la relation des compléments,

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2;$$

en sorte qu'on peut écrire

$$(5) \qquad V = \frac{abc\sqrt{2}}{3.16}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}\right]^2 = \frac{abc\sqrt{2}}{3}\,l^2$$

en posant :

$$4l = \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

ou encore, en remplaçant x par y^4,

$$l = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

Or, si l'on considère la lemniscate de Bernoulli $\rho^2 = \cos 2\theta$, on a pour l'arc compris entre un sommet et l'origine

$$l = \int_0^1 \sqrt{\rho^2 \frac{d\theta^2}{d\rho^2} + 1}\; d\rho,$$

mais

$$\frac{d\theta^2}{d\rho^2} = \frac{\rho^2}{\sin^2 2\theta} = \frac{\rho^2}{1-\rho^4},$$

et il vient

$$l = \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}.$$

La formule (5) représente donc le huitième du volume de la surface considérée, si l'on y désigne par l le quart de la longueur de la lemniscate $\rho^2 = \cos 2\theta$.

D'une façon plus générale, comme il a été déjà dit, la formule de Dirichlet est très utile dans l'évaluation des intégrales qui se présentent en mécanique, ou plutôt dans la géométrie des masses.

Lejeune-Dirichlet (*J. de Liou.*, t. IV, p. 164) a aussi appliqué la même méthode à la détermination de l'attraction de l'ellipsoïde homogène. Ses résultats ont été généralisés par :

Mehler, *J. de Cr.*, t. LX, p. 321 ...
Mertens, *J. de Cr.*, t. LXIII, p. 360 ... et t. LXX, p. 1 ...
Grube, *J. de Cr.*, t. LXIX, p. 359 ...

Arrivons maintenant à des intégrales multiples d'un caractère plus général que celles examinées jusqu'ici.

Soit

$$W = \int\int \dots f(x+y+z+\dots)\, x^{k-1} y^{l-1} z^{m-1} \dots dx\, dy\, dz \dots,$$

une intégrale multiple où les variables indépendantes x, y, z, ... sont toutes positives et satisfont à la condition

$$x + y + z + \dots < h,$$

h étant une constante positive; de plus f est une fonction de x, y, z, ... assujettie à la seule condition que l'intégrale considérée ait une signification. On suppose que k, l, m, ... sont des constantes positives.

Pour trouver la valeur de cette intégrale, nous partirons des cas les plus simples et nous supposerons d'abord $n = 2$.

Si dans l'intégrale

$$W = \int_0^h x^{k-1}\, dx \int_0^{h-x} f(x+y)\, y^{l-1}\, dy$$

on pose, comme nous l'avons déjà fait pour la réduction des fonctions B aux fonctions Γ,

$$x = uv, \qquad y = u(1-v),$$

il vient

$$W = \int_0^h du \int_0^1 u^{k-1} v^{k-1} f(u)\, u^{l-1} (1-v)^{l-1}\, u\, dv,$$

$$= \int_0^h u^{k+l-1} f(u)\, du \int_0^1 v^{k-1} (1-v)^{l-1}\, dv,$$

et par suite

$$W = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)} \int_0^h f(u)\, u^{k+l-1}\, du.$$

Considérons l'intégrale triple, on a

$$W = \int_0^h x^{k-1}\,dx \int_0^{y_1} y^{l-1}\,dy \int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{m-1}\,dz,$$

en désignant par y_1 la quantité $h-x$. Mais on a, d'après la formule établie précédemment,

$$\int_0^{y_1} y^{l-1}\,dy \int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{m-1}\,dz = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \int_0^{y_1} f(x+u)\,u^{l+m-1}\,du,$$

donc

$$W = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \int_0^h x^{k-1}\,dx \int_0^{h-x} f(x+u)\,u^{l+m-1}\,du,$$

et la formule déjà établie s'applique à l'intégrale double qui apparaît dans le second membre, en sorte qu'il vient enfin :

$$W = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(k)\,\Gamma(l+m)}{\Gamma(l+m)\,\Gamma(k+l+m)} \int_0^h f(w)\,w^{k+l+m-1}\,dw = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(k+l+m)} \int_0^h f(w)\,w^{k+l+m-1}\,dw.$$

La méthode s'applique à une intégrale d'ordre quelconque de multiplicité, et l'on a

$$(6)\quad \begin{cases} W = \iint \dots f(x+y+z+\dots)\,x^{k-1}\,y^{l-1}\,z^{m-1}\dots\,dx\,dy\,dz\dots \\ \qquad = \dfrac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)\dots}{\Gamma(k+l+m+\dots)} \displaystyle\int_0^h f(\theta)\,\theta^{k+l+m+\dots-1}\,d\theta, \end{cases}$$

en supposant

$$0 < x + y + z + \dots < h.$$

Si l'on fait $h = 1$ et $f(\theta) = 1$, on retrouve la formule établie

précédemment. Comme alors, on peut obtenir la formule plus générale

$$(7)\quad \begin{cases} \iint\!\!\dots f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\dots\right]x^{k-1}y^{l-1}z^{m-1}\dots\,dx\,dy\,dz\dots \\ \quad=\dfrac{a^k b^l c^m\dots}{pqr\dots}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{k}{p}\right)\Gamma\left(\frac{l}{q}\right)\Gamma\left(\frac{m}{r}\right)\dots}{\Gamma\left(\frac{k}{p}+\frac{l}{q}+\frac{m}{r}+\dots\right)}\int_0^h f(\theta)\,\theta^{\frac{k}{p}+\frac{l}{q}+\frac{m}{r}+\dots-1}\,d\theta, \end{cases}$$

k, l, m, ... p, q, r, ... x, y, z, ... étant des quantités toutes positives, les dernières étant assujetties à la condition

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\dots<h.$$

Si $f(\theta)$ est une fonction telle que l'intégrale

$$\int_0^h f(\theta)\,\theta^{k+l+m+\dots-1}\,d\theta$$

conserve un sens lorsque h augmente indéfiniment, on peut dans la formule précédente faire croître h au delà de toute limite. Remplaçons alors les quantités $a, b, c, \dots$ par $\sqrt[p]{\frac{1}{a}}, \sqrt[q]{\frac{1}{b}}, \sqrt[r]{\frac{1}{c}}, \dots$ et θ par θ^2, on obtient alors l'expression

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\!\!\dots f(ax^p+by^q+cz^r+\dots)\,x^{k-1}y^{l-1}z^{m-1}\dots\,dx\,dy\,dz\dots$$

$$=\frac{2}{pqr\dots a^{\frac{k}{p}}b^{\frac{l}{q}}c^{\frac{m}{r}}\dots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k}{p}\right)\Gamma\left(\frac{l}{q}\right)\Gamma\left(\frac{m}{r}\right)\dots}{\Gamma\left(\frac{k}{p}+\frac{l}{q}+\frac{m}{r}\right)}$$

$$\times\int_0^\infty f(\theta^2)\,\theta^{2\left(\frac{k}{p}+\frac{l}{q}+\frac{m}{r}+\dots\right)-1}\,d\theta.$$

Liouville (*J. de Liou.*, t. IV, p. 225 ...) donna la généralisation des théorèmes de réduction des intégrales multiples aux fonctions gamma et les nouvelles propositions auxquelles il arriva furent

elles-mêmes bientôt généralisées et trouvèrent un grand nombre d'applications. Nous citerons:

Raabe, *Reduction des p. fachen Integrales.*

$$\int_0^{x^{(p)}} \varphi(a_1 x_1^{n_1} + \ldots + a_p x_p^{n_p})\, x_1^{r_1-1} \ldots x_p^{r_p-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p.$$

(*J. de Cr.*, t. XXVII, p. 19.)

Most, *Ueber drei Integrationen innerhalb...* (*Schl. Z.*, t. XIV, p. 422).

Catalan, *Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples* (*J. de Liou.*, t. IV, p. 323).

§ **24.** La formule

$$\frac{1}{n^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-nx}\, x^{a-1}\, dx$$

permet de démontrer quelques théorèmes remarquables sur les séries des puissances réciproques des nombres entiers. On déduit en effet de la considération de cette intégrale les théorèmes suivants.

En mettant à la place de n successivement les nombres $2, 3, 4, \ldots$, on a

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x x^{a-1}\, dx \sum_2^\infty e^{-nx} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-2x}\, x^{a-1}\, dx}{1-e^{-x}},$$

et en faisant successivement $a = 2, 3, 4 \ldots$ on a

$$(1) \quad \sum_{a=2}^{a=\infty} \sum_{a=2}^{a=\infty} \frac{1}{n^a} = \int_0^x \frac{e^{-2x}}{1-e^{-x}} \sum_1^\infty \frac{x^a}{a!}\, dx = \int_0^x \frac{(e^x-1)\, e^{-2x}}{1-e^{-x}}\, dx$$
$$= \int_0^x e^{-x}\, dx = 1.$$

La somme des puissances réciproques de tous les nombres entiers est égale à l'unité.

D'une façon plus générale on a

$$\sum_{r=2}^{r=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(p+n)^a}=\frac{1}{p}.$$

Si dans la formule (1) on fait n successivement égal à tous les nombres pairs, on a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(2n)^a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{e^{-2x}x^{a-1}}{1-e^{-2x}}dx=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{e^{2x}-1},$$

et par suite

$$(2)\qquad \sum_{r=2}^{r=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(2n)^a}=\int_0^\infty\frac{(e^x-1)dx}{e^{2x}-1}=\int_0^\infty\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=l2.$$

La somme des puissances réciproques de tous les nombres pairs est égale à $l2$.

Si dans la formule (1) on donne à n toutes les valeurs de la forme $4n+3$, on obtient la relation

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{e^{-3x}}{1-e^{-4x}}x^{a-1}dx=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{e^x x^{a-1}dx}{e^{4x}-1},$$

et par suite

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^{2r+1}}=\int_0^\infty\frac{e^x}{e^{4x}-1}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dx}{e^{2x}-1}-\int_0^\infty\frac{e^x dx}{e^{4x}-1};$$

et ces intégrales se déterminent facilement; on obtient

$$(3)\qquad \sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^{2r+1}}=\frac{\pi}{8}-\frac{l2}{2}.$$

On a de même

$$(4)\quad \sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^{2r}}=\int_0^\infty \frac{e^x\,dx}{e^{4x}-1}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\,dx}{e^{-2x}+1}=\frac{1}{4}\,l2.$$

Enfin, en faisant $n = 2, 6, 10, \ldots 4n+2, \ldots$ on obtient les relations

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+2)^a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,e^{-2x}}{1-e^{-4x}}\,dx=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{e^{2x}\,x^{a-1}\,dx}{e^{4x}-1},$$

et par suite

$$(5)\quad \sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+2)^{2r}}=\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{e^{4x}-1}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}=\frac{\pi}{8}.$$

Voir à propos de ces différents théorèmes :
Stern, *J. de Cr.*, t. X, p. 209.
Steiner, *J. de Cr.*, t. XIII, p. 361.
Meyer, *Best. Integ.* et *Gr. Arch.*, t. XLI, p. 220.

Supposons que pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1 on ait l'équation

$$(6)\qquad F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

remplaçons dans les deux membres x par $x\theta^b$ et multiplions-les par le facteur

$$\theta^{a-1}(1-\theta)^{q-1}\,d\theta,$$

l'intégrale prise entre les limites 0 et 1 du premier membre donne

$$\int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{q-1}\,F(x\theta^b)\,d\theta,$$

et pour le second membre, on obtient, en tenant compte de la formule de réduction des fonctions B aux fonctions Γ,

$$A_0\frac{\Gamma(a)\Gamma(q)}{\Gamma(a+q)}+A_1\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(q)}{\Gamma(a+b+q)}x+A_2\frac{\Gamma(a+2b)\Gamma(q)}{\Gamma(a+2b+q)}x^2+\ldots$$

Si l'on suppose q entier et positif, on a donc

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{q-1}F(x\theta^b)\,d\theta = \frac{A_0}{a(a+1)\dots(a+q-1)} \\ &\quad + \frac{A_1 x}{(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+q-1)} \\ &\quad + \frac{A_2 x^2}{(a+2b)(a+2b+1)\dots(a+2b+q-1)} + \dots \end{aligned}\right.$$

et, dans tous les cas où l'intégrale peut s'exprimer sous forme finie, on arrive ainsi à sommer la série du second membre.

Prenons, par exemple, $F(x)=(1+x)^\mu$, on a alors

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{q-1}(1+x\theta^b)^\mu\,d\theta = \frac{1}{a(a+1)\dots(a+q-1)} \\ &\quad + \frac{\mu}{1}\frac{x}{(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+q-1)} \\ &\quad + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\frac{x^2}{(a+2b)(a+2b+1)\dots(a+2b+q-1)} + \dots \end{aligned}\right.$$

Lorsque a et b sont des nombres entiers, l'intégration peut être effectuée. Si, par exemple, on a

$$a=b=1, \qquad q=3, \qquad \mu=-1,$$

il vient

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1+x^2}{2x^2}\,l(1+x) - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x} \\ &= \frac{1}{1.2.3} - \frac{x}{2.3.4} + \frac{x^2}{3.4.5} - \frac{x^3}{4.5.6} + \dots, \end{aligned}\right.$$

x étant compris entre -1 et $+1$.

Si dans la formule (8) on fait $b=1$, $x=1$, μ étant alors supposé positif, l'intégrale est alors une intégrale eulérienne de seconde espèce, et il vient

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(a)\Gamma(q+\mu)}{\Gamma(q)\Gamma(a+q+\mu)} = \frac{1}{a(a+1)\dots(a+q-1)} \\ &\quad - \frac{\mu}{1}\frac{1}{(a+1)(a+2)\dots(a+q)} \\ &\quad + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\frac{1}{(a+2)(a+3)\dots(a+q+1)} - \dots \end{aligned}\right.$$

Dans la formule (6) remplaçons dans les deux membres x par $x\theta$ et multiplions de part et d'autre par

$$\theta^{b-1}(1-\theta)^{c-b-1}\,d\theta;$$

en intégrant entre les limites 0 et 1, on obtient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1 \theta^{b-1}(1-\theta)^{c-b-1}\,F(x\theta)\,d\theta \\ &= A_0 + \frac{b}{c}A_1 x + \frac{b(b+1)}{c(c+1)}A_2 x^2 + \frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}A_3 x^3 + \dots \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait, par exemple, $F(x)=(1-x)^{-a}$, on trouve

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1 \theta^{b-1}(1-\theta)^{c-b-1}(1-\theta x)^{-a}\,d\theta \\ &\qquad = 1 + \frac{ab}{1.c}x + \frac{a(a+1)}{1.2}\frac{b(b+1)}{c(c+1)}x^2 \\ &\qquad + \frac{a(a+1)(a+2)}{1.2.3}\frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots, \end{aligned}\right.$$

et il y a bien des cas où l'on peut effectuer l'intégration figurée au premier membre. Si l'on fait en particulier $x=1$, l'intégrale est une intégrale eulérienne de première espèce, et il vient

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} = 1 + \frac{a}{1}\frac{b}{c} + \frac{a(a+1)}{1.2}\frac{b(b+1)}{c(c+1)} \\ &\qquad + \frac{a(a+1)(a+2)}{1.2.3}\frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} + \dots, \end{aligned}\right.$$

où l'on doit nécessairement supposer $c > a+b$.

Inversement, si l'on choisit $F(x)$ et les constantes A en sorte que la série du second membre ait une somme connue à l'avance, on peut obtenir par les formules précédentes, les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies.

Dans la formule (12) faisons $a=-\frac{1}{2}\mu$, $b=\frac{1}{2}\mu$, $c=\frac{1}{2}$, $x=z^2$ et le second membre est alors le développement de $\cos\mu \arcsin z$.

Si nous posons en outre $\alpha = \arcsin z$ et si nous faisons $\theta = \sin^2\omega$, il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-1}\theta \cos^{-\mu}\theta (1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{\frac{\mu}{2}} d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \cos\mu\alpha;$$

μ doit être compris entre 0 et 1 et α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Les considérations précédentes sont empruntées à Schlömilch (*Compendium*, t. II, p. 277...).

Le second membre de la formule (12) est la série appelée hypergéométrique que Gauss a étudiée dans le Mémoire que nous avons souvent cité (*Werke*, t. III) et qui a donné naissance aux remarquables travaux de Kummer, Jacobi, Goursat, etc. C'est à l'occasion de la formule (13) que Gauss s'est trouvé amené à étudier d'une façon plus particulière la fonction gamma.

D'autres applications à la théorie des suites ont été exposées par Limbourg (*Théorie de la fonction gamma*, p. 120...).

Il convient encore de citer à ce point de vue Schlömilch (*Schl. Z.*, t. III, p. 130), Lejeune-Dirichlet (*J. de Cr.*, t. XVII, p. 57). Voir aussi Berger, sur une sommation de quelques séries. (*Nov. Act. Upsal*, XII$_4$).

§ **25.** La fonction $\psi(v)$ peut servir à sommer plusieurs suites remarquables.

Considérons la somme

$$(b) \qquad S_n = \frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \ldots + \frac{a}{b+nc}.$$

On a évidemment

$$S_n = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\left[\frac{1}{\frac{b}{c}+1} + \frac{1}{\frac{b}{c}+2} + \ldots + \frac{1}{\frac{b}{c}+n}\right],$$

et par conséquent

$$S_{n+1} - S_n = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c} + n + 1} = \frac{a}{c}\left[\psi\left(\frac{b}{c} + n + 2\right) - \psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right)\right],$$

ou bien

$$S_{n+1} - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + n + 2\right) = S_n - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right).$$

On voit donc que la différence

$$S_n - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right)$$

ne change pas quand on augmente ou quand on diminue n d'une unité. On a donc

$$S_n - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right) = S_0 - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + 1\right) = \frac{a}{b} - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + 1\right),$$

et, par suite,

$$S_n = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right) - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + 1\right). \tag{2}$$

On aura, par exemple,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2x+1} = 1 + \frac{1}{2}\psi\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{3}{2}\right).$$

Soit encore

$$S_x = \frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} - \ldots - \frac{a}{b+(2x+1)c}; \tag{3}$$

on a

$$S_x = \frac{a}{b} + \frac{a}{b+2c} + \ldots + \frac{a}{b+2xc} - \left(\frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+3c} + \ldots + \frac{a}{b+(2x+1)c}\right),$$

et, en employant la formule précédemment établie,

$$(4)\quad \begin{cases} S_x = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{2c}\psi\left(\dfrac{b}{2c}+x+1\right) - \dfrac{a}{2c}\psi\left(\dfrac{b}{2c}+1\right) \\ \qquad - \dfrac{a}{b+c} - \dfrac{a}{2c}\psi\left(\dfrac{b}{2c}+x+\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{a}{2c}\psi\left(\dfrac{b}{2c}+\dfrac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Faisons croître x indéfiniment, on aura à la limite

$$\psi\left(\frac{b}{2c}+1+x\right) = \psi\left(\frac{b}{2c}+\frac{3}{2}+x\right),$$

et par conséquent

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{b+2c} - \ldots = \dfrac{a}{b(b+c)} \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\left[\psi\left(\dfrac{b+3c}{2}\right) - \psi\left(\dfrac{b+2c}{2}\right)\right]. \end{cases}$$

Par exemple, en faisant $b=1$, $c=1$, on a

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\psi(2) - \psi\left(\frac{3}{2}\right)\right] = l2;$$

si l'on fait $b=1$, $c=2$,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\left[\psi\left(\frac{7}{4}\right) - \psi\left(\frac{5}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4},$$

c'est-à-dire

$$\pi = \frac{8}{3} + \psi\left(\frac{7}{4}\right) - \psi\left(\frac{5}{4}\right).$$

Considérons encore l'expression connue

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi-\pi} - \frac{1}{\varphi+\pi} + \frac{1}{\varphi-2\pi} + \frac{1}{\varphi+2\pi} - \ldots,$$

que nous écrirons

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi-\pi} + \frac{1}{\varphi-2\pi} - \ldots - \left(\frac{1}{\varphi+\pi} - \frac{1}{\varphi+\pi+\pi} + \frac{1}{\varphi+\pi+2\pi} - \ldots\right).$$

En appliquant deux fois la formule (5), nous trouvons

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\pi}{\varphi(\pi-\varphi)} - \frac{\pi}{(\varphi+\pi)(\varphi+2\pi)} + \frac{1}{2\pi}\left[\psi\left(\frac{2\pi-\varphi}{2\pi}\right)+\psi\left(\frac{3\pi+\varphi}{2\pi}\right)-\psi\left(\frac{3\pi-\varphi}{2\pi}\right)-\psi\left(\frac{4\pi+\varphi}{2\pi}\right)\right].$$

Faisons $\varphi = m\pi$ et il vient

$$\frac{\pi}{\sin m\pi} = \frac{1}{m(1-m)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{2}\left[\psi\left(1+\frac{m}{2}\right)-\psi\left(\frac{2+m}{2}\right)+\psi\left(\frac{3}{2}+\frac{m}{2}\right)-\psi\left(\frac{3}{2}-\frac{m}{2}\right)\right].$$

Si dans cette formule on remplace $\frac{m}{2}$ par x et si l'on tient compte de la formule

$$\psi(1+x) = \frac{1}{x} + \psi(x),$$

il vient enfin

$$\psi(1-x) - \psi(x) + \psi\left(\frac{1}{2}+x\right) - \psi\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{2\pi}{\sin 2\pi x},$$

formule facile à vérifier au moyen de la relation des compléments.

Au sujet de l'application des fonctions

$$\frac{d l\Gamma(x)}{dx}, \quad \frac{d^2 l\Gamma x}{dx^2}, \ldots,$$

nous renverrons en particulier à une Note de M. Appell (*C. R.*, t. LXXXVI, p. 953).

Le terme général du binôme $(p+q)^\mu$ est

$$\frac{1.2.3 \ldots \mu}{1.2 \ldots n . 1.2 \ldots m} p^n q^m$$

ou bien

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)} p^n q^m, \tag{1}$$

m et n étant deux nombres entiers dont la somme est égale à μ.

Lorsque m, n et μ sont très grands, on ne pourrait songer, même en employant les logarithmes, à calculer un tel terme. Employons les expressions approchées des fonctions Γ.

On a

$$\Gamma(\mu+1) = e^{-\mu}\mu^{\mu}\sqrt{2\mu\pi},$$
$$\Gamma(n+1) = e^{-n}n^{n}\sqrt{2n\pi},$$
$$\Gamma(m+1) = e^{-m}m^{m}\sqrt{2m\pi},$$

et la formule considérée devient

$$(2)\qquad \frac{e^{-\mu}\mu^{\mu}\sqrt{2\mu\pi}}{e^{-n}n^{n}\sqrt{2n\pi}\,e^{-m}m^{m}\sqrt{2m\pi}}p^{n}q^{m} = \frac{\mu^{\mu}\sqrt{\mu}}{n^{n}m^{m}\sqrt{2mn}}\frac{p^{n}q^{m}}{\sqrt{\pi}}.$$

En posant $n = \alpha\mu$, $m = \beta\mu$, cette expression devient

$$(3)\qquad \frac{p^{n}q^{m}}{\alpha^{n}\beta^{m}\sqrt{2\alpha\beta}}\frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}, \quad \text{où} \quad \alpha+\beta=1.$$

L'expression du rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{q}{p}\,\frac{\mu-n}{n+1}.$$

en sorte que le plus grand terme est déterminé par les inégalités

$$\frac{q}{p}\,\frac{\mu-n+1}{n} > 1,$$
$$\frac{q}{p}\,\frac{\mu-n}{n+1} < 1,$$

c'est-à-dire

$$(\mu+1)q > n(p+q),$$
$$(\mu+1)q < (n+1)(p+q);$$

en sorte que n est la partie entière du quotient $\frac{(\mu+1)q}{p+q}$; de même m est alors la partie entière du quotient $\frac{(\mu+1)p}{p+q}$ et par conséquent lorsque μ est très grand, les exposants de p et de q dans le plus grand terme, sont à peu près dans le rapport même

de p à q. Dans l'expression trouvée précédemment, il suffira donc de faire $\alpha = \frac{p}{p+q}$, $\beta = \frac{q}{p+q}$ pour avoir la valeur approchée du plus grand terme. On trouve alors

$$\frac{(p+q)^{\mu+1}}{\sqrt{\pi\mu}\sqrt{2pq}}. \tag{4}$$

Si p et q représentent les probabilités de deux événements contraires, la somme $p+q$ est égale à l'unité. Alors les termes du développement de $(p+q)^\mu$ représentent les probabilités respectives de diverses combinaisons qui peuvent survenir sur μ épreuves dans la succession des événements considérés.

L'événement le plus probable est celui dont la probabilité est représentée par la formule

$$\frac{(p+q)^{\mu+1}}{\sqrt{\pi\mu}\sqrt{2pq}};$$

c'est celui pour lequel les deux événements arrivent un nombre de fois proportionnel à leurs chances respectives. Il est évident que, même alors, la probabilité, quoique la plus grande de toutes, tend vers zéro avec le nombre μ des épreuves.

Les mêmes formules d'approximation des fonctions gamma permettent d'exprimer simplement la valeur approchée du groupe de termes qui dans le développement suivent et précèdent le plus grand, c'est-à-dire la probabilité pour que le nombre d'arrivées des deux événements contraires ne s'écarte pas au delà d'une limite donnée du nombre correspondant au maximum.

La théorie des probabilités contient un nombre considérable d'applications de la fonction gamma et tout particulièrement des évaluations approchées de cette fonction.

Laplace, dans sa *Théorie des Probabilités,* avait eu souvent l'occasion de s'occuper des fonctions de très grands nombres, mais les procédés particuliers auxquels il a eu recours ne peuvent être considérés comme satisfaisants.

La théorie des probabilités n'est pas la seule branche d'analyse où les fonctions gamma trouvent un emploi continuel. Nous devons aussi citer son application dans la théorie des équations aux différences finies. (Voir, par exemple, le traité de Boole et les mémoires de Russell, Blissard...)

Nous devons aussi indiquer quelques mémoires sur la théorie des nombres où les fonctions gamma jouent un grand rôle.

Lejeune-Dirichlet, *J. de Cr.*, t. XVII, p. 57.

Jacobi, *Berlin. Monatsb.*, 1837.

Genocchi, *Tortolini G.*, III, p. 406.

Kronecker, *J. de Cr.*, 1860; *Berlin. Monatsb.*. 1864 et 1870.

Berger, *Nov. Act. Upsal.*, t. XI et XII.

BIBLIOGRAPHIE

Wallis, 1655.
Arithmetica Infinitorum.

Stirling, 1730.
Methodus differentialis s. Tractatus de summatione et interpolatione serierum.

Euler, 1730. *Comm. Petr.*, t. V, p. 36.
De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.

— 1734-1735. *Comm. Petr.*, t. VII, p. 156.
De progressionibus harmonicis observationes.

— 1739. *Comm. Petr.*, t. XI, p. 3-21.
De productis ex infinitis factoribus ortis.

— 1743. *Misc. Berol.*, t. VII, p. 91.

— Theoremata circa reductionem formularum integraliun ad circuli quadraturam.

— 1755 (2e éd., de 1787).
Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi infinitorum ac doctrina serierum.

— *N. Comm. Petr.*, t. VI, p. 115-154.
De expressione integralium per factores.

— 1762-65, *Misc. Taur.*, t. III, p. 156.
Observationes circa integralia talium formularum $\int x^{p-1} dx (1-x)^{\frac{q-1}{n}}$ posito post integrationem $x = 1$.

Euler, 1768-70, 3 vol. (2e éd., 1792-94, 4 vol.)
Institutiones Calculi integralis.

— 1769, *N. Comm.*, t. XIV, p. 129.
De summis serierum numeros Bernoullianos involventium.

— 1771, *N. Comm.*, t. XVI, p. 91-139 et *Calc. Integ.*, t. IV, p. 78-121.
Evolutio formulæ integralis $\int x^{f-1}dx(lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x=0$ ad $x=1$ extensa.

— 1774, *N. Comm.*, t. XIX, p. 30; *Calc. Integ.*, t. IV, p. 122.
De valore formulæ integralis $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{z \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^{\mu}$ casu quo post integrationem ponitur $z=1$.

— 1774, *N. Comm.*, t. XIX, p. 66.
Nova methodus quantitates integrales determinandi.

— 1775, *N. Comm.*, t. XX, p. 59.
Speculationes analyticæ.

— 1776, *N. Acta*, t. V, p. 86-118 et 118-129.
Comparatio formulæ integralis $\int \sqrt[n]{\frac{x^{\nu-1}dx}{(1-x^n)^{n-q}}}$ a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensæ.

— 1776, *N. Acta*, t. V, p. 3.
Evolutio formulæ integralis $\int dx \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx}\right)$ a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensæ.

— 1776, *N. Acta*, t. VIII, p. 15.
De vero valore hujus formulæ integralis $\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^n$ a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensæ.

— 1781, *Cal. Integr.*, t. IV, p. 337-345.
De valoribus integralium a termino variabili $x=0$ usque ad $x=\infty$ extensorum.

— ? *Opera posthuma*, (1862), t. I, p. 430-438; *Bull. Darboux*, t. IV$_2$, 1e P., p. 209-256.
Considérations sur quelques formules intégrales dont les

valeurs peuvent être exprimées en certains cas par la quadrature du cercle.

Mascheroni, 1790.

Adnotationes ad calculum integralem Euleri.

Kramp, 1799.

Analyse des réflexions astronomiques et terrestres.

Legendre, 1819, *Mém. Inst.*, t. X, p. 416-509 (*Exerc.*, t. I, 2e P.).

Recherches sur diverses sortes d'intégrales définies.

Bessel, 1812, *Königsb. Arch.*, t. I, p. 241; *Werke*, t. II, p. 350.

Ueber die Theorie der Zahlenfacultäten.

Bidone, 1811, *Mém. Turin*, t. XX, p. 231-245.

Mémoires sur diverses intégrales définies.

Gauss, 1812, *Comm. Gött.*, t. II, p. 1-46; *Werke*, t. III.

Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

Poisson, 1813, *J. Ec. Pol.*, 16e et 17e cah.

Sur les intégrales définies.

Legendre, 1816.

Exercices de Calcul....

Cisa de Grésy, 1821, *Mém. Turin*, t. XXVI, p. 209-396.

Mémoire sur les intégrales définies.

Poisson, 1823, *J. Ec. Pol.*, cah. XIX, p. 404-509.

Suite du Mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries.

Sturm, 1824, *Ann. Math. Ger.*, t. XIV, p. 17-23.

Deux théorèmes.

Ampère, 1825, *Ann. Math. Gerg.*, t. XX, p. 369-381.

Analogie entre les facultés numériques et les puissances.

Abel, 1823, *Œuvres*, 2e éd., t. I, p. 11-17.

Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies.

— 1826, *Œuvres*, 2e éd., t. I, p. 97-101.

Résolution d'un problème de mécanique.

Abel, 1827, *Œuvres*, 2e éd., t. I, p. 251-262.

Sur quelques intégrales définies.

— ? *Œuvres*, 2e éd., t. II, p. 1-6.

Les fonctions transcendantes $\Sigma \frac{1}{a^2}$, $\Sigma \frac{1}{a^3}$, ..., $\Sigma \frac{1}{a^n}$.

— ? *Œuvres*, 2e éd., t. VII, p. 7-13.

Sur l'intégrale définie $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)\left(l\frac{1}{x}\right)^{x-1} dx$.

Crelle, 1831, *J. de Cr.*, t. VII, p. 253-305; 314-380.

Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques.

Jacobi, 1834, *J. de Cr.*, t. XI, p. 307.

Demonstratio formulæ

$$\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1} dw = \frac{\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \int_0^\infty e^{-x} x^{b-1} dx}{\int_0^\infty e^{-x} x^{a+b-1} dx} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Müller, 1834, *J. de Cr.*, t. XI, p. 361-372.

Beitrag zur Theorie der Facultäten.

Lejeune-Dirichlet, 1836, *J. de Cr.*, t. XV, p. 258-263.

Sur les intégrales Eulériennes.

Plana, 1837, *J. de Cr.*, t. XVII, p. 1-34, 163-202.

Recherches analytiques sur les expressions du rapport de la circonférence au diamètre trouvées par Wallis et Brounker et sur la théorie de l'intégrale Eulérienne $\int_0^a x^{n-1}(1-x^n)^l dx$.

Pagès, 1837, *J. de Liou.*, t. II, p. 437-438.

Note sur une propriété des sections coniques.

Catalan, 1838, *J. de Liou.*, t. III, p. 508-516.

Note sur une équation aux différences finies.

Lejeune-Dirichlet, 1839, *C. R.*, t. VIII, p. 156; *J. de Liou.*, t. IV, p. 164-168.

Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples.

Binet, 1839, *C. R.*; t. IX, p. 39-45; *J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, p. 123-343.

Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes et sur leur application à la théorie des suites, ainsi qu'à l'évaluation des fonctions de grands nombres.

Liouville, 1839, *C. R.*, t. IX, p. 105-108; *J. de Liou.*, t. IV, p. 317-322.

Note sur l'évaluation approchée du produit $1.2.3...x$.

Binet, 1839, *C. R.*, t. IX, p. 156-159.

Note sur l'expression du logarithme de l'intégrale Eulérienne $\Gamma(p)$.

Brassine, 1839, *Mém. Toulouse*, t. V,, p. 139-142.

Fragments d'un Mémoire sur l'intégration des équations différentielles.

Catalan, 1839, *J. de Liou.*, t. IV, p. 95-99.

Addition à la Note du t. III, p. 508.

— 1839, *J. de Liou.*, p. 323-344.

Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples.

Lejeune-Dirichlet, 1839, *J. de Liou.*, p. 393-422.

Démonstration de cette proposition. — Toute progression arithmétique, dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun, contient une infinité de nombres premiers.

Greatheed, 1839, *Camb. Math. J.*, t. I, p. 11-21, 109-117.

On general differentiation.

? 1839, *Camb. Math. J.*, t. I, p. 94-96.

On differentiation.

Stern, 1840, *J. de Cr.*, t. XXI, p. 377-379.

Remarques sur les intégrales Eulériennes.

Catalan, 1840, *J. de Liou.*, t. V, p. 110-114.

Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n} dx$.

— 1841, *J. de Liou.*, t. VI, p. 81-84.

Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple.

Grunert, 1842, *Gr. Arc.*, t. II, p. 266-323.

Ueber die neuesten Erfindungen in der Theorie der bestimmten Integrale.

Serret, 1842, *J. de Liou.*, t. VII, p. 114-119.

Note sur les intégrales Eulériennes de seconde espèce.

Binet, 1843, *C. R.*, t. XVI, p. 377-381.

Note sur la détermination de l'intégrale Eulérienne binôme $\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1}$ dans le cas où l'un des arguments p et q est un nombre rationnel.

Cauchy, 1843, *C. R.*, t. XVI, p. 422-433.

Mémoire sur la théorie des intégrales définies singulières appliquées généralement à la détermination des intégrales définies et en particulier à l'évolution des intégrales Eulériennes.

— 1843, *C. R.*, t. XVII, p. 370-377.

Recherches sur les intégrales Eulériennes.

Boncompagni, 1843, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 74-96.

Recherches sur les intégrales définies.

Raabe, 1843, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 147-159.

Angenäherte Bestimmung der Factorenfolge $1.2.3\ldots n = \Gamma(1+n) = \int e^{-x}x^n dx$ wenn n eine sehr grosse Zahl ist.

Serret, 1843, *J. de Liou.*, t. VIII, p. 1-22.

Note sur quelques formules de calcul intégral.

Tchebychef, 1843, *J. de Liou.*, t. VIII, p. 235-238.

Note sur une classe d'intégrales définies multiples.

Serret, 1843, *J. de Liou.*, t. VIII, p. 489-494.

Sur quelques formules relatives à la théorie des intégrales Eulériennes.

Cauchy, 1844, *C. R.*, t. XIX, p. 67-73.

Note sur les intégrales Eulériennes.

— 1844, *Exerc. d'An. et de Ph. Math.*, t. II, p. 358-410.

Mémoire sur la théorie des intégrales définies singulières appliquées généralement à la détermination des inté-

grales définies et en particulier à l'évaluation des intégrales Euléríennes.

Binet, 1844, *C. R.*, t. XIX, p. 375.

Recherches sur une question de l'analyse des probabilités...

Féaux, 1844, *Monasterii typis Coppenrathianis.*

De functione quæ littera $\Gamma_{()}$ obsignatur sive de integrali Euleriano secundæ speciei :

Raabe, 1844, *J. de Cr.*, t. XXVIII, p. 10-18

Angenäherte Bestimung der Factorenfolge

$$1.2.3 \ldots n = \Gamma(1+n) = \int x^n e^{-x} dx,$$

wenn n eine sehr grosse Zahl ist. (Fortsetzung.)

— 1844, *J. de Cr.*, t. XXVIII, p. 19-27.

Reduction des p. fachen Integral-Ausdrucks

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \varphi(a_1 x_1^{n_1} + \ldots + a_p x_p^{n_p}) x_1^{r_1-1} \ldots x_p^{r_p-1} dx_1 \ldots dx_p$$

auf ein einfaches ...

Schlömilch, 1844, *Gr. Arc.*, t. IV, p. 167-174.

Einiges über die Euler'sche Integrale der zweiten Art.

Mainardi, 1845, *Mem. Ist. Veneto*, t. II, p. 401-424.

Sulla integrazione della formula $\frac{F}{E\sqrt[3]{\psi}}$ essendo F, E, ψ funzioni intere di una medesima variabile.

Gudermann, 1845, *J. de Cr.*, t. XXIX, p. 209-212.

Additamentum ad functionis $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$ theoriam.

Cayley, 1845, *J. de Liou.*, t. X, p. 158-168 et 242-244.

Sur quelques intégrales multiples.

Weddle, 1845, *Mathem.*, t. I, p. 143-146.

On the fonction $\Gamma(x+1)$.

Schlömilch, 1845, *Gr. Arc.* t. IV, p. 213-222.

Ein Paar allgemeine Eigenschaften der Euler'schen Integrale zweiten Art.

Schlömilch, 1846, *J. de Cr.*, t. XXXIII, p. 268-280.

Note sur la variation des constantes arbitraires d'une intégrale définie.

— 1846, *Gr. Arc.*, t. VII, p. 346-353.

Ueber Legendre's Theorie von den Euler'schen Integralen zweiter Art.

Svanberg, 1846, *J. de Liou.*, t. XI, p. 197-200.

Sur les intégrales définies

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1}\,dx}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos \beta x . x^{m-1}\,dx}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin \beta x . x^{m-1}\,dx}{1+x^2}.$$

Liouville, 1846, *J. de Liou.*, t. XI, p. 464-465.

Sur l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x} x^n\,dx$.

Schaar, 1846, *Mém. Cour. Brux.*, t. XXII, p. 1-25.

Mémoire sur les intégrales Eulériennes et sur la convergence d'une certaine classe de séries.

Kummer, 1847, *J. de Cr.*, t. XXXV, p. 1-4.

Beitrag zur Theorie der Function $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-v} v^{x-1}\,dv$.

Oettinger, 1846 à 1852, *J. de Cr.*, t. XXXIII, XXXV, XXXVIII et XLIV (huit mémoires).

Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

Arndt, 1847, *Gr. Arc.*, t. X, p. 250-253.

Ueber einen von Gauss gefundenen Ausdruck der Gamma-Function.

Cayley, 1847, *J. de Liou.*, t. XII, p. 231-240.

Sur quelques formules du calcul intégral.

Schlömilch, 1848, Leipzig, Engelmann.

Analytische Studien.

Ohm, 1848, *J. de Cr.*, t. XXXVI, p. 277-295.

Ueber das Verhalten der Gamma-Function zu den Producten æquidifferenter Factoren.

Newmann, 1848, *Camb. and Dub. Math. J.*, t. III, p. 57-60

On $\Gamma(a)$ especially when a is negative.

Arentz, 1850, Indbydelsesskrift ... Christiania.
Om Functionen Γm, iscer med Hensyn til dens numeriske Evaluation.

Ohm, 1850, *J. de Cr.*, t. XXXIX, p. 23-41.
Ueber die Behandlung der Lehre der reellen Factoriellen und Facultäten, nach einer Methode der Einschliessung in Grenzen

Hoppe, 1850, *J. de Cr.*, t. XL, p. 152-159.
Remarque sur la réduction de la fonction Gamma, et sur la définition de cette fonction et des facultés analytiques par leurs propriétés.

Meyer, 1851, *Mém. Liège*, t. VII, p. 1-510.
Exposé élémentaire de la théorie des intégrales définies.

Raabe, 1852, *J. de Cr.*, t. XLIII, p. 283-292.
Ueber die Factorielle $\left(\frac{m}{k}\right)$ ...

Schlömilch, 1852, *J. de Cr.*, t. XLIV, p. 344-355.
Sur les facultés analytiques.

Genocchi, 1852, *Annali Tortol*, t. III, p. 406-436.
Sulla formula sommatoria di Eulero, e sulla teoria de residui quadratici.

Dedekind, 1852, Inaugural Dissertation.
Ueber die Elemente der Theorie der Euler'schen Integrale.

Liouville, 1852, *C. R.*, t. XXXV, p. 317-322; *J. de Liou.*, t. XVI, p. 448-453.
Note sur les fonctions Gamma de Legendre.

Genocchi, 1853, *Bull. Brux.*, t. XX, p. 392-397.
Démonstration élémentaire d'une formule logarithmique de M. Binet.

Dedekind, 1853, *J. de Cr.*, t. XLV, p. 370-374.
Ueber ein Euler'sches Integral.

Dienger, 1853, *J. de Cr.*, t. XLVI, p. 119-144.
Summen von Reihen ausgedrückt durch bestimmte Integrale. Anwendungen dieser Sätze.

Genocchi, 1854, *Annal. Tortol.*, t. V, p. 150-160.

Demonstration élémentaire d'une formule logarithmique de M. Binet.

Genocchi, 1854, *Bull. Brux.*, t. XXI, p. 64-95.

Sur quelques particularités de formules d'analyse mathématique.

Cauchy, 1854, *C. R.*, t. XXXIX, p. 129-135,

Sur une formule de M. Anger et d'autres formules analogues.

Raabe, 1854, *J. de Cr.*, t. XLVIII, p. 130-136.

Werthung der Factorielle ...

Liouville, 1855, *J. de Liou.*, t. XX, p. 133-134.

Valeur d'une intégrale définie qui se rattache aux intégrales trinômes.

— 1855, *J. de Liou.*, t. XX, p. 157-160.

Sur un théorème relatif à l'intégrale Eulérienne de seconde espèce.

— 1855, *J. de Liou.*, t. XX, p. 161-163.

Sur l'équation $\Gamma(t)\,\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2t}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2t)$.

— 1856, *C. R.*, t. XLII, p. 500-508; *J. de Liou.*, t. I$_1$, p. 82-88.

Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de Gauss concernant les fonctions Gamma de Legendre.

— 1856, *J. de Liou.*, t. I$_1$, p. 280-294.

Mémoire sur la réduction de classes très étendues d'intégrales multiples.

— 1856, *J. de Liou.*, t. I$_1$, p. 445.

Démonstration nouvelle d'une formule de M. Thomson.

Björling, 1856, *Overs. Stock. Förhandl.*, p. 181-182.

Bevis för formeln $\int_0^{\infty} l\Gamma(x+p)\,dx=\frac{1}{2}\,l2\pi+p\,lp-p$.

Schlömilch, 1856, *Schl. Z.*, t. I, p. 118-119.

Zur Theorie der Gammafunction.

Jacobi, 1856, *N. A. M.*, t. XV, p. 337-352.

Sur la division du cercle et son application à la théorie des nombres.

Schlömilch, Cayley, Liouville, 1857, *J. de Liou.*, t II,, p. 47-55.

Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}}{(a+bt-ct^2)^{\mu-1}}$.

Schlömilch, 1857, *J. de Liou.*, t. II,, p. 206-218.

Réduction d'une intégrale multiple.

Kinkelin, 1857, *Mitt. Ger. Bern.*, p. 1-11.

Dic Fundamentalgleichungen der Function $\Gamma(x)$.

Enneper, 1857, *Quart. J.*, t. I, p. 276-279.

On the definite integral $\int_0^\infty \frac{\sin^q u}{u^m} du$.

— 1857, *Quart. J.*, t. I, p. 393-405.

On the function $\Gamma(x)$ with imaginary and complex variable.

Schmit, 1858, *Mém. Liège*, t. XIII, p. 289-327.

Intégrales définies....

Catalan, 1858, *C. R.*, t. XLVII, p. 545-549.

Sur une application de la formule du binôme aux intégrales Eulériennes.

Schlömilch, 1858, *Schl. Z.*, t. III, p. 130-132.

Ueber eine Eigenschaft gewisser Reihen.

Clausen, 1858, *Gr. Arc.*, t. XXX, p. 166-170.

Ueber die Ableitung des Differentials von $l\Gamma(x)$.

Zehfuss, 1858, *Gr. Arc.*, t. XXX, p. 441.

Einfache Herleitung des Gauss'schen Ausdrucks für $\Gamma(x)$.

Schlaefli, 1858-59, *Quart. J.*, t. II, p. 269-301; t. III, p. 54-68, 97-108.

On the multiple integral $\int^n dx\,dy\,....\,dz....$

Limbourg, 1859, Gand.

Théorie de la fonction gamma.

Bierens de Haan, 1858 (2e éd. 1867).

Tables d'Intégrales définies.

Lipschitz, 1859, *J. de Cr.*, t. LVI, p. 11-26.

Ueber die Darstellung gewisser Functionen durch die Euler'sche Summenformel.

Liouville, 1859, *J. de Liou.*, t. V$_{2}$, p. 155-160.

Sur une intégrale définie multiple.

Schlömilch, 1859, *Schl. Z.*, t. IV, p. 431-433.

Entwickelung einer neuen Reihe für die Gammafunction.

Zehfuss, 1859, *N. A. M.*, t. XVIII.

Déduction simple de l'expression $\Gamma(x)$ de Gauss.

Schlömilch, 1859, *Schl. Z.*, t. IV, p. 390.

Ueber Facultäten Reihen.

Bonnet, 1860, *C. R.*, t. I, p. 862.

Sur la formule de Stirling.

Schlömilch, 1860, *Schl. Z.*, t. V, p. 228.

$$1.2.3 \ldots n > (\sqrt{n})^n,$$

Schläfli, 1858-1860, *Quart. J.*, t. II, p. 269; t. III, p. 54 et 98.

On the multiple integral $\int^n dx\,dy \ldots dz$ whose limits are $p_1 = a_1 x + b_1 y + \ldots + h_1 z > 0$, $p_2 > 0, \ldots, p_n > 0$, and $x^2 + y^2 + \ldots + z^2 < 1$.

Bauer, 1860, *J. de Cr.*, t. LVII.

Von den Gammafunctionen und einer besonderen Art unendlicher Producte.

Dietrich, 1861, *J. de Cr.*, t. LIX, p. 163.

Ueber eine Reihentransformation Stirlings.

Russell, 1861, *Quart. J.*, t. IV, p. 163-165; 316-318.

Note on the transformation of certain multiple integrals.

Bierens de Haan, 1862.

Exposé de la théorie, des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies.

Enneper, 1862, *Schl. Z.*, t. VII, p. 187.

Bemerkung über die Gammafunction.

Hoppe, 1863, *Grun. Arc.*, t. XLI, p. 65.

Beweis für einen Satz von den Euler'schen Integralen.

Hankel, 1863, *Leipzig.* et *Schl. Z.*, t. IX, p. 1 ...

Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments.

Heine, 1863, *J. de Cr.*, t. LXI, p. 356-366.

Ueber einige bestimmte Integrale.

Oettinger, 1864, *J. de Cr.*, t. LXIII, p. 252-254.

Ueber ein bestimmtes Integral.

Schlömilch, 1864, *Schl. Z.*, t. IX, p. 356.

Ueber ein Paar durch Gammafunctionen ausdrückbaren Integrale.

Walton, 1866-67, *Quart. J.*, t. VII, p. 212, t. VIII, p. 52-65, 136-144.

On interpolation with reference to development and differentiation.

Stern, 1867, *J. de Cr.*, t. LXVII, p. 114-129.

Beweis eines Satzes von Legendre.

Meyer, C. F., 1867, *Arch. Gr.*, t. XLI, p. 220-231.

Summation reciproker Potenzreihen mittelst der Formel

$$\frac{1}{s^a} = \frac{1}{\Pi(a-1)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{a-1} dx.$$

Shanks, 1867, *Proceed. Lond.*, t. XV, p. 429.

On the Calculation of the numerical value of Euler's Constant, et Supplementary Paper.

Schläfli, 1867, *Quart. J.*, t. VIII, p. 370-373.

On the multiple integral $\int^n dxdy...dz$ whose limits are $p_1 = a_1x + b_1y + ... + h_1z > 0$, $p_2 > 0$, ..., $p_n > 0$, and $x^2 + y^2 + ... + z^2 > 1$.

Matthiessen, 1867, *Schl. Z.*, t. XII, p. 302-321.

Zur Theorie der bestimmten Integrale und der Gammafunctionem.

Blissard, 1868, *Quart. J.*, t. IX, p. 280-296.

On certain properties of the Gammafunction.

Shanks, 1868, *Proceed. Lond.*, t. XVI, p. 154 et 299-300.
Second and third Supplementary Paper on the calculation of the numerical value of Euler's constant.

Meyer, 1871, Leipzig.
Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Greuzen.

Glaisher, 1872, *Messenger*, t. I,, p. 25-30.
On the history of Euler's constant.

Shanks, 1871, *Proceed. London.*, t. XIX, p. 29-34.
Paper on the numerical value of Eulers's constant and on the summation of the harmonic series employed in obtaining such value.

Realis, 1871, *Battaglino G.*, t. IX, p, 345-354.
Esercizio elementare sugl' integrali euleriani della prima specie.

Blissard, 1871, *Ed. Times*, t. XIV, p. 64.
Questions 3074, 3105.

Glaisher, 1872, *Report Brit. Ass.; Messenger*, t. I,, p. 106-111.
On the integrals $\int_0^\infty \sin(x^n)dx$ and $\int_0^\infty \cos(x^n)dx$.

— 1872, *Rep. Brit., Ass.*
On the evaluation in series of certain definite integrals.

— 1872, *Rep. Brit. Ass.*
On the funtion that stands in the same relation to Bernoulli's numbers that the Gammafunction does to factorials.

— 1872, *Ed. Times*, t. XVI, p. 23.
Question 3429.

Catalan, 1873, *C. R.*, t. LXXVII, p. 198-201.
Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet.

Enneper, 1873, *Schl. Z.*, t. XVIII, p. 407-415.
Ueber einige bestimmte Integrale.

Bierens de Haan, 1873, *Arch. Néerl.*, t. VIII, p. 135-147.
Sur quelques intégrales définies à facteurs e^{qx^p}, $\cos(qx^p)$, $\sin(qx^n)$.

Bierens de Haan, 1873, *Arch. Néerl.*, t. VIII, p. 148-152.

De l'intégrale $\int_a^b l\Gamma(x)\,dx$.

— 1873. *Verslagen en Meded.*, t. VII$_2$, p. 12-31.

Bydragen tot de theorie der bepaaldte integralen.

De Tilly, 1873, *Bull. Belg.*, t. XXXV$_2$, p. 30-40.

Note sur la formule qui donne, en série convergente, la somme des logarithmes hyperboliques des x-1 premiers nombres entiers.

Gilbert, 1873, *Bull. Bellg*, t. XXXV$_2$, p. 5-11.

Rapport sur ce Mémoire.

Genocchi, 1873, *Bull. Belg.*, t. XXXVI$_2$, p. 546-565.

Sur quelques développements de la fonction $l\Gamma(x)$.

De Tilly, 1873, *Bull. Belg.*, t. XXXVI$_2$, p. 454-468.

Rapport sur ce Mémoire.

Gilbert, 1873, *Bull. Belg.*, t. XXXVI$_2$, p. 541-545.

Observations sur deux Notes de M. A. Genocchi relatives au développement de la fonction $l\Gamma(x)$.

— *Mém. de Belg.*, t. XLI.

Recherches sur le développement de la fonction Γ et sur certaines intégrales définies qui en dépendent.

Catalan, 1873, *Bull. Belg.*, t. XXXVI$_2$, p. 4-16.

Rapport sur ce Mémoire.

Genocchi, 1874, *Bull. Belg.*, t. XXXVII$_2$, p. 351-352.

Réclamation de priorité au sujet de la série de Binet.

De Tilly, 1874, *Bull. Belg.*, t. XXXVIII$_2$, p. 67-70.

Sur la généralisation de la formule de Binet.

Bellavitis, 1874, *Mem. Ist. Veneto.*, t. XVIII, p. 125-162.

Tavole numeriche del logarithmo integrale ovv. dell' esponenziale integrale e di altri integrali Euleriani.

Catalan, 1874. *Liouville*, I$_2$, p. 209-241; *Bull. Belg.*, t. XXXIV, p. 424-428.

Sur la constante d'Euler et la formule de Binet.

Féaux, 1875, *Prog. Augsburg.*

Recherches d'Analyse.

Hočevar, 1876, *Schl. Z.*, t. XXI, p. 449-450.
Ueber die unvollständige Gammafunction.
Liebrecht, 1876, *Gr. Arc.*, t. LIX, p. 218-224.
Ueber einige bestimmte Integrale.
Catalan, 1877, *Mém. de Belgique*, t. XLII.
Sur quelques formules relatives aux intégrales Eulériennes.
Hall, Eddy, Kummel, 1877, *Analyst*, t. IV, p. 48, 94, 120-121.
On an integral.
Glaisher, 1877, *Ed. Times*, t. XXVIII, p. 19.
Question 5249.
Spitzer, 1877, *Gr. Arc.*, t. LXI, p. 329-332.
Bestimmung der Flächeninhalten.
Glaisher, 1877, *Quart. J.*, t. XV, p. 57-64.
Proof of Stirling's theorem...
Kummel, 1877, *Analyst*, t. IV, p. 156-157, p. 182-183.
On the Gammafonction.
Appell, 1878, *C. R.*, t. LXXXVI, p. 953-956.
Sur quelques applications de la fonction $\Gamma(x)$ et d'une autre fonction transcendante.
— 1878, *C. R.*, t. LXXXVII, p. 874-876.
Évaluation d'une intégrale définie.
Hermite, 1879, *Atti di Torino*, t. XIV, p. 91-116.
Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}-z^{-\alpha}}{1-z}\,dz$.
Hoesch, 1879, *Dissert.*, Göttingen,
Untersuchungen über die Π Function von Gauss und verwandte Functionen.
Eneström, 1879, *Ofversigt Vetens. Ak...*
Om upptäckten af den Euler'ska summations formeln.
Schlömilch, 1880, *Schl. Z.*, t. XXV, p. 351-352.
Ueber den Quotienten zweier Gammafunctionen.
— 1880, *Schl. Z.*, t. XXV, p. 103-106.
Einige Bemerkungen über den reciproken Werth der Gammafunction.
— 1880, *Schl. Z.*, t. XXV, p. 337-342.
Ueber eine Verwandte der Gammafunction.

De Longchamps, 1880, *Ann. Ec. Norm.*, t. IX$_1$, p. 419-427.
Sur les intégrales eulériennes de seconde espèce.

Bourguet, 1881, *Ann. Ec. Norm.*, t. X$_1$, p. 175-233.
Développement en séries des intégrales Eulériennes.

— 1881, *Bull. Darb.*, t. V$_1$, p. 43-51.
Sur les intégrales eulériennes.

Ricart, 1881, *Cron. cient.*, t. IV, p. 209-211.
Relacion entre las dos integrales Eulerianas.

Bourguet, 1881, *Atti di Torino*, t. XVI, p. 755-772.
Sur la détermination des maxima et minima de la fonction $\Gamma(x)$.

Sonine, 1881, *Bull. S. M.*, t. IX, p. 162-166.
Note sur une formule de Gauss.

Gylden, 1881, *C. R.*, t. XCII, p. 897-901, 941-943.
Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce.

Stabenow, Selby, 1881, *Ed. Times*, t. XXXIV, p. 75-76.
Question 6378.

Berger, 1881, *Upsal. N. Acta*, t. XI, XII.
Sur quelques applications de la fonction Gamma.

Glaisher, 1881, *Lond. M. S. Proc.*, t. XIII, p. 92-99.
On some definite integrals expressible in terms of the first complete elliptic integral and of gamma functions.

Krantz, 1881, *Nieuw. Arch.*, t. VII, p. 207-212.
Bepaling van de waarde der uitdrukking.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{\cos\varphi}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}.$$

Hermite, 1881, *J. de Cr.*, t. XC, p. 332-338.
Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce.

Appell, 1881, *C. R.*, t. LXXXVI, p. 953; t. LXXXIX, p. 841 et 1031; *Math. Ann.*, t. XIX, p. 84-102.
Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes.

Bourguet, 1882, *Acta Math.*, t. I, p. 295.
Note sur les intégrales Eulériennes.

Bourguet, 1882, *Acta Math.*, t. I, p. 363.
Sur quelques intégrales définies.

— 1883, *Acta Math.*, t. II, p. 261.
Sur les intégrales Eulériennes et quelques autres fonctions uniformes.

— 1883, *Acta Math.*, t. II, p. 296.
Sur la fonction Eulérienne.

Mellin, 1883, *Acta Math.*, t. II, p. 231.
Ueber die transcendente Function $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$,

— 1883, *Ofversigt Vetensk. Ak.*
Om Gamma funktionen.

Mellin, 1883, *Acta Math.*, t. III, p. 102.
Eine Verallgemeinerung der Gleichung

$$\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

— 1883, *Acta Math.*, t. III, p. 322.
Ueber gewisse durch die Gammafunction ausdrückbare unendliche Producte.

NOTE SUR LE CALCUL FONCTIONNEL

L'existence de la relation fonctionnelle à laquelle satisfait la fonction Γ, conduisit Euler à s'occuper d'une question plus générale qui fit le sujet d'un de ses mémoires : ***Methodus inveniendi formulas integrales quæ certis casibus datam inter se teneant relationem.*** (*Opuscula Anal.*, t. II, p. 178-216; *Calc. Integ.*, t. IV, p. 378-415).

Mais ce n'est là que le germe de ce que Babbage a appelé plus tard le *calcul fonctionnel.*

La détermination de fonctions au moyen de conditions données prit réellement naissance dans les travaux relatifs à l'intégration des équations aux dérivées partielles, et l'on voit bientôt les inventeurs de ce calcul aux prises avec le problème auquel il avait donné le jour.

D'Alembert, puis Euler et Lagrange s'occupèrent de cette question, mais c'est à Monge que l'on doit les vues les plus générales sur ce sujet. Ses recherches portèrent sur la détermination de deux fonctions par des conditions données; elles se trouvent dans les *Mélanges* de Turin (T. V) et dans deux mémoires contenus dans le septième volume des *Mém. Sav. él.*, 1773.

Laplace, dans le même volume, s'occupa de la réduction de l'équation fonctionnelle $F(x, \varphi x, \varphi ax) = 0$ à une équation aux différences finies où la différence est constante. C'est encore à ce point de vue que se plaçait Herschel dans ses recherches sur la même question. Citons aussi Arbogast. Les résultats les plus importants de cette branche particulière de l'Analyse sont dus à Babbage.

On pourrait peut-être avant lui citer Fuss (*Mem. Aca. Pet.* t. V, p. 225.) Mais c'est à Babbage que revient le mérite d'avoir, dans deux mémoires excessivement remarquables, mis en relief l'importance des questions qui se rattachent à cette théorie et d'avoir trouvé des méthodes de solutions curieuses à plus d'un titre (*Phil. Transact,* 1815 et 1816). Le nombre des questions soulevées par Babbage est considérable; ses réponses peuvent aujourd'hui, dans l'état actuel de l'Analyse, être considérées comme insuffisantes; il suppose en effet, en général, que l'on connaît une ou plusieurs solutions des équations fonctionnelles qu'il considère et se propose d'en déduire d'autres; nous devons cependant dire que les équations fonctionnelles dont Babbage s'est occupé comprennent un bon nombre de fonctions nouvelles sur lesquelles se sont portés depuis 1816 les efforts des géomètres, et, pour ne citer que quelques exemples, les fonctions doublement périodiques et les fonctions fuchsiennes; nous pouvons également rappeler les fonctions périodiques générales que M. Appell a retrouvées d'une façon si élégante et que M. Rausenberger a étudiées dans les *Math. Annalen.*

En 1817 (*Phil. Trans.*), Babbage publiait un nouveau Mémoire sur l'analogie qui existe entre le calcul des fonctions et d'autres branches de l'Analyse.

En 1820, il donnait un petit recueil de problèmes (Peacok, Herschel and Babbage. Examples...) et l'on pouvait croire que la nouvelle théorie serait bientôt l'objet de travaux suivis de la part des géomètres.

Cependant on doit reconnaître que ce n'est qu'occasionnellement que les analystes se sont occupés des parties principales de ce nouveau calcul : l'itération et la solution des équations (¹).

Nous pourrions cependant citer de nombreuses notes et quelques Mémoires parus jusqu'à ces dernières années et se rapportant à notre sujet.

(¹) Si le terme de *calcul fonctionnel* n'est peut-être pas très bien choisi (V. Ellis, *Mathematical Papers*), il nous semble que le mot d'*intégration* appliqué à la résolution des équations fonctionnelles n'a aucun sens.

? (probablement Cauchy), *Ann. Math. Gergonne*, p. 350.
Schweins, 1825, *Theorie der Differenzen und Differentiale.*
Abel, 1826, *J. de Cr.*, t. I, p. 11; *Œuvres*, t. I, p. 61.
— 1826, *J. de Cr.*, t. I, p. 322.
— 1827, *J. de Cr.*, t. II, p. 386; *Œuvres*, t. I, p. 389.
— ? *Œuvres*, t. II, p. 36.
— ? *Œuvres*, t. II, p. 189.
Crelle, 1837, *J. de Cr.*, t. XVII, p. 92.
Hill, *J. de Cr.*, t. VII, p. 104; t. IX, p. 100.
— *J. de Cr.*, t. XI, p. 241.
— *J. de Cr.*, t. XI,
— Elementa Matheseos Universæ.
Clausen, *J. de Cr.*, t. IV, p. 279.
— *J. de Cr.*, t. IX, p. 200.
Ramus, *J. de Cr.*, t. IX, p. 359.
Bellavitis, 1831, *Ann. d. Scienze*, Padova, t. I, p. 347.
Boole, 1844, *Phil. Trans.*,
Schlömilch, 1852, *Bericht. Leipzig.*
Lottner, *J. de Cr.*, t. XLVI, p. 367.
Beltrami, 1863, *Nouv. Ann.*, t. II, p. 191 et 302.
Dupain, 1866, *Nouv. Ann.*, t. V, p. 336 (').

Nous laissons de côté dans cette énumération rapide tout ce qui a été écrit sur l'itération de l'expression $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Ce qui précède suffit toutefois pour montrer que le calcul fonctionnel avait déjà suffisamment attiré l'attention lorsque M. Schröder reprit quelques-unes de ces questions, croyant n'avoir eu que bien peu de prédécesseurs. (*Math. Ann.*, t. III.) Il paraît ne pas avoir eu connaissance des travaux de Hill, et cependant ce dernier avait signalé, il est juste de le reconnaître, l'importance de certaines questions effleurées maintenant à la

(') Au point de vue didactique, on doit ne pas oublier le *Traité des Différences* de Boole où le calcul fonctionnel occupe une large place et l'*Essai d'une exposition systématique du Calcul fonctionnel dans le cas d'une seule variable indépendante* publié par Liventsof dans la *Revue mathématique de Moscou*, t. VIII, 1er fascicule (Voir *Bull. Darboux*, t. I$_2$, p. 141).

suite de Schröder, par MM. Farkas et Kœnigs, mais non encore complètement résolues. Quoi qu'il en soit, nous ne voulions pas seulement ici rappeler à l'occasion du calcul fonctionnel, quelques noms importants et que l'on a tort de laisser dans l'oubli; nous voulions aussi attirer l'attention sur les conditions qui permettent de définir une fonction. La relation fonctionnelle à laquelle satisfait la fonction Γ est une des plus simples que l'on puisse concevoir, nous avons vu cependant que l'équation

$$\varphi(x+1) = x\varphi(x) \tag{1}$$

ne suffit pas à la définir; nous avons vu qu'il fallait y ajouter la condition

$$\lim \frac{\varphi(x+n)}{(n-1)!\, n^x} = 1.$$

Des conditions de nature semblable paraissent devoir se présenter pour des équations fonctionnelles de nature plus générale que l'équation (1).

Nous avons signalé rapidement les travaux de quelques analystes, mais nous n'avons pu parler de l'importance du calcul fonctionnel en physique mathématique et en physique moléculaire; nous avons dû également laisser de côté ses applications géométriques. Nous espérons avoir l'occasion de revenir sur cette branche importante de l'Analyse.

non ene
voulions ;
el, quelqu
oubli ; n
permett
à laque
l'on pu

ajouter

voir s
e pl

elq
cel
lai
vill
ch

TABLE DES MATIÈRES

DU 1er FASCICULE DU TOME III.

G. BRUNEL. — Monographie de la fonction gamma..... 1

Bordeaux.—Imp. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.

3 2044 070 870 845

[redacted]

[redacted]